

Vzorová řešení a komentáře k 4. sérii úloh

Úloha č. 1

Na obrázku 1 je tabulka 6×6 s vyznačenými oblastmi. Vyplňte (původně prázdnou) tabulku čísly 1 až 6, aby v žádném řádku ani sloupci nebyla dvě stejná čísla. Navíc každá oblast určuje ještě další pravidlo pro svá políčka.

- V oblasti $a+$ je potřeba, aby součet políček oblasti byl a .
- V oblasti $b-$ je potřeba, aby rozdíl dvou políček oblasti byl b (nevíme, které políčko určuje menšence a které menšitele).
- V oblasti $c \times$ je potřeba, aby součin políček oblasti byl c .
- V oblasti $d \div$ je potřeba, aby podíl dvou políček oblasti byl d (nevíme, které políčko určuje dělence a které dělitele).

V této úloze stačí správně vyplnit tabulku.

Řešení:

$11+$ 5/6	$2 \div$		$20 \times$ 4/5	$6 \times$ 1	
5/6	$3-$		4/5	$3 \div$	
$240 \times$ 4	5	$6 \times$			
3	4	$6 \times$	$7+$	$30 \times$ 5/6	5/6
$6 \times$				4	$9+$
$8+$			$2 \div$		

Obr. 1

Nejdříve se podíváme, jestli nám nějaká z kritérií výrazně neomezují, jaká čísla mohou být na daném políčku. Součin 30 ($30 \times$) jde získat pouze součinem 5 a 6 , takže víme, že ve čtvrtém řádku budou 5 a 6 právě v $30 \times$ oblasti.

Také víme, že součin 20 ($20\times$) jde získat pouze součinem 4 a 5 , takže ve čtvrtém sloupci se budou tato čísla nacházet právě v oblasti $20\times$. Součet 11 ($11+$) jde dvěma čísly získat pouze z 6 a 5 , takže v prvním sloupci budou tato čísla v oblasti $11+$.

Poté si všimněme, že na součin 6 potřebujeme použít 4 čísla – jediný způsob, jak toto udělat, je za použití dvou 1 , 2 a 3 . Jelikož v sudoku nemohou být stejná čísla ve stejném řádku ani sloupci, tak víme, že jedna 1 bude v 5 . sloupci a jedna bude v 6 . sloupci na jiném řádku. Kvůli tomu, že máme jen jedno pole v 5 . sloupci, tak víme, že právě v oblasti $6\times$ v 5 . sloupci musí být 1 .

Následně se podíváme na oblast $240\times$ a na to, z jakých čísel se může skládat. Buď $3\times 4\times 4\times 5$, nebo $2\times 3\times 5\times 6$. V obou případech potřebujeme 5 , takže se podíváme, kam ji můžeme umístit. Jelikož jsme přišli na to, že v 1 . sloupci a 4 . řádku už nemohou být žádné 5 , tak 5 musí být v pravém horním rohu oblasti $240\times$. Ze stejného důvodu už se nám nevejde 6 do $240\times$, takže musíme dát $3, 4, 4$. 4 musí být v jiných sloupcích a řádcích, takže budou v levém horním a pravém spodním rohu $240\times$; a 3 bude v levém spodním rohu.

Součet 7 nám vznikne buď jako $1 + 3 + 3$ nebo jako $1 + 2 + 4$. Dvě 3 už se nám nevejdou do jiných sloupců a řádků, takže musíme vybrat součet $1 + 2 + 4$. Kvůli 4 v $20\times$ musí být 4 napravo dole v $7+$. Naše tabulka aktuálně vypadá jako na obrázku 1.

$11+$ 5	$2\div$ 6	3	$20\times$ 4	$6\times$ 1	2
6	$3-$ 1	4	5	$3\div$ 2	3
$240\times$ 4	5	$6\times$ 2	3	6	1
3	4	$6\times$ 1	$7+$ 2	$30\times$ 5	6
$6\times$ 2	3	6	1	4	$9+$ 5
$8+$ 1	2	5	$2\div$ 6	3	4

Obr. 2

Zbývající možnosti bude nejjednodušší vyzkoušet. Pojdme si dát do 7+ nahoru 1 a dolů 2. Po několika krocích, které nám diktují, co kde musí být (například ve vedlejším $6 \times$ musí nahoře být 2 a dole 3), dojdeme k tomu, že nám to nevyjde.

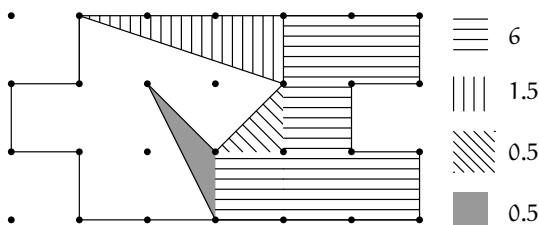
Pojdme tedy do 7+ dát nahoru 2 a dolů 1. Po několika krocích se dostaneme do stavu, kdy nám vše sedí a v každém řádku i sloupci máme vše právě jednou. Vyplněná tabulka vypadá jako na obrázku 2.

Komentář: Chyby v řešení nastávaly převážně v tom, že si řešitelé neuvědomili, že součin 240 lze získat nejen jako $6 \times 5 \times 3 \times 2$, ale i jako $5 \times 4 \times 4 \times 3$, kvůli čemuž jim to následně nevyžázelo.

Úloha č. 2

V pohoří And leží horské jezero, které místní rozdělili kamennou hrází na dvě části. Jezero je všude stejně hluboké. Plán tohoto jezera je na obrázku. (Tečky tvoří pravidelnou čtverečkovou mřížku.) Objem vody v pravé části jezera je 136. Určete objem vody v levé části.

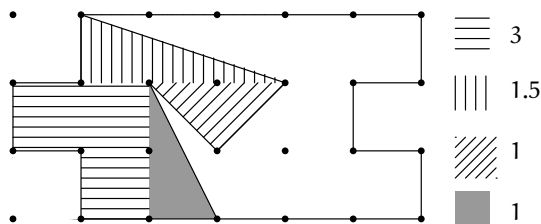
Řešení: Dle obrázku 3 si pojdme spočítat, kolik čtverečků zabírá pravá část jezera. Oblast s horizontálním šrafováním je jednoznačně 6 čtverečků. Část s vertikálním šrafováním zabírá polovinu obsahu tří čtverečků, tedy zabírá $\frac{3}{2}$. Další je oblast s příčným šrafováním, která zabírá polovinu čtverečku.



Obr. 3

Poslední nám zbývá vybarvená část, která je nejkomplicovanější. Víme, že vybarvený trojúhelník spolu s malým trojúhelníkem nad ním zabírají dohromady polovinu z obsahu dvou čtverečků. Jelikož malý trojúhelník nad vybarveným trojúhelníkem má obsah poloviny čtverečku, pak obsah vybarvené části musí být $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ čtverečku.

Pravá část jezera tedy zabírá dohromady $6 + 1,5 + 0,5 + 0,5 = 8,5$ čtverečků. Tato oblast má ze zadání objem vody 136. To znamená, že objem vody v jednom



Obr. 4

čtverečku je $\frac{136}{8,5} = 16$.

Nyní se podívejme na levou část jezera na obrázku 4. Horizontálně vyšrafovaná oblast zabírá 3 čtverečky. Vertikálně vyšrafovaná oblast musí zabírat $\frac{3}{2}$ čtverečku, protože zabírá polovinu obdélníku o obsahu 3. Příčně šrafovaná část je velká $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ čtvereček a nakonec vybarvená oblast zabírá polovinu obdélníku o obsahu 2 čtverečky, tedy tato vybarvená část zabírá 1 čtvereček.

Celkem levá část jezera zabírá $3 + 1,5 + 1 + 1 = 6,5$ čtverečků. Víme, že jeden čtvereček odpovídá objemu 16; a jelikož je jezero všude stejně hluboké, pak bude objem v levé části jezera $6,5 \cdot 16 = 104$.

Komentář: Drtivá většina řešitelů mělo úlohu správně, chyby nastávaly převážně v početních chybách.

Úloha č. 3

María má obdélník o rozměrech 12×4 a chce jej rozdělit na právě 7 čtverců s celočíselnými délkami stran. Může se jí to povést?

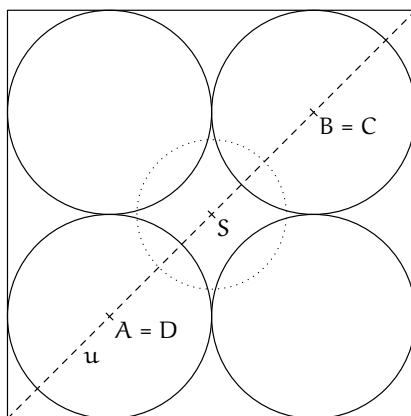
Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, že pokud použijeme čtverec o rozměru 3×3 , tak vždy vznikne obdélník 1×3 , který lze vyplnit pouze třemi čtverci o rozměru 1×1 . Tedy za každý použitý 3×3 čtverec musíme použít další tři 1×1 čtverce, celkově tedy čtyři. Ovšem pokud využijeme takto čtyři čtverce, tak nám zůstane obdélník o velikosti 4×9 a jelikož je jeho délka lichá, tak musíme použít alespoň jeden další 3×3 čtverec. Ovšem pak bychom museli použít další tři 1×1 čtverce a celkový počet využitých čtverců se zvýší na 8, což je moc. Stejná situace nastane, pokud místo 3×3 čtverce využijeme čtyři čtverce 1×1 , aby nám vznikl nevyplněný obdélník o velikosti 4×8 ; pak totiž stejně využijeme 8 čtverců, což je moc. Z tohoto plyne, že nemůžeme použít žádný čtverec o velikosti 3×3 .

Jeden čtverec o velikosti 4×4 lze nahradit minimálně čtyřmi čtverci o velikosti 2×2 . To znamená, že pokud použijeme pouze jeden 4×4 čtverec, tak nejmenší

možný počet čtverců, co můžeme využít, je 9, což je moc. Pokud použijeme 4×4 čtverce dva, tak nám zbyde plocha 4×4 , kterou musíme vyplnit pěti čtverci. Zde si můžeme napsat soustavu rovnic, kde x je počet 1×1 čtverců a y je počet 2×2 čtverců: $x + y = 5$, $x + 4y = 16$. Ovšem řešení této soustavy pro y je $3y = 11$. Což by znamenalo, že počet 2×2 čtverců by musel být $\frac{11}{3}$. To je neceločíselné, což znamená, že neexistuje řešení, jak obdélník vyplnit.

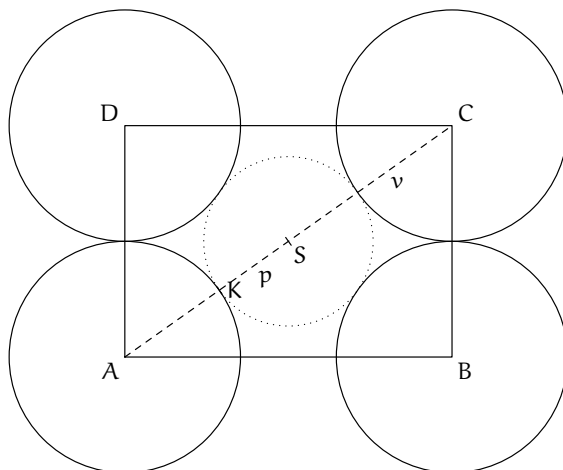
Úloha č. 4

Sofia má krabičku ve tvaru krychle o délce strany 4. Nejdříve do ní vloží 8 stejných červených korálků ve tvaru koule, přičemž poloměr těchto korálků je největší možný. Nyní chce přidat do mezery vzniklé mezi 8 červenými korálky nový modrý korálek tak, aby tento modrý korálek měl se všemi červenými korálky vnější dotyk. Vytáhne tedy horní červené korálky, vloží modrý korálek, vloží zpět červené korálky a do krabičky to výškově přesně sedí. Určete poloměr modrého korálku. Výsledek dobře zdůvodněte.



Obr. 5

Řešení: Na obrázku 5 máme schéma toho, jak bude krabička vypadat shora. Vidíme, že ve spodní vrstvě krabičky, stejně tak jako v horní, jsou 4 koule (červené korálky), každá o poloměru 1 cm. Tyto dvě vrstvy nám na obrázku splývají v jednu, a proto i středy každých dvou koulí nám splývají v jeden bod (tedy $A = D$ a $B = C$). Prostřední koule se středem S (modrý korálek) je vklíněna



Obr. 6

uprostřed. Z tohoto pohledu není jasné, jak můžeme spočítat její poloměr. Proto uděláme krabičkou řez, jak jsme na obrázku 5 naznačili přerušovanou čarou.

Řezem jsme rozpůlili koule se středy A, B, C, D a S napůl. Na obrázku 6 máme pohled na tento řez ze strany. Z tohoto pohledu půjde již poloměr koule se středem S spočítat snáze. Určíme nejdříve délky stran obdélníku ABCD, který nám spojuje středy velkých koulí. Jelikož tyto koule mají poloměr 1 cm, určitě platí, že $|AD| = |BC| = 2$ cm. Velikosti stran CD a AB zjistíme pohledem zpět na obrázek 5. Tato vzdálenost je rovna polovině délky úhlopříčky stěny krabičky, která z našeho pohledu splývá s řezem naznačeným přerušovanou čarou. Délku úhlopříčky u spočítáme Pythagorovou větou z velikostí stran krabičky:

$$u = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Delší strana obdélníku ABCD má tedy velikost $2\sqrt{2}$. Pythagorovou větou spočítáme velikost jeho úhlopříčky v :

$$v = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Od této úhlopříčky nám již stačí odečíst poloměr koulí se středy A a C a získáme průměr koule S. Po vydělení dvěma získáme hledaný poloměr:

$$p = \frac{2\sqrt{3} - 2 \cdot 1}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

Poloměr modrého korálku je $\sqrt{3} - 1$ cm.

Komentář: Častým špatným řešením, které řešitelé odevzdávali, bylo $\sqrt{2} - 1$ cm. K tomuto řešení dojdeme, pokud si úlohu příliš zjednodušíme a krychli s osmi koulemi si nahradíme čtvercem se čtyřmi kruhy. Dále na řešitele apelujeme, aby výsledek vždy uváděli ve tvaru s odmocninou, a nikoliv vyčíslený.

Úloha č. 5

Dvojčata Santiago a Diego pořádají oslavu narozenin. Diego si na oslavu přichystal celkem $8n + 37$ bonbonů, zatímco Santiago $3n + 14$ zákusků. Na svou oslavu chtějí pozvat co nejvíce lidí tak, aby mezi ně bylo možné spravedlivě rozdělit bonbóny i zákusky (každé zvlášť). Určete, jaké n mají zvolit, aby počet hostů mohl být co největší. Bonbony ani zákusky nelze řezat na dílky. Výsledek dobře zdůvodněte.

Řešení: Pokud chceme zjistit největší počet lidí, mezi které lze rozdělit $8n + 37$ bonbonů a $3n + 14$ zákusků, potřebujeme určit největší společný dělitel těchto dvou čísel.

1. způsob: Pro zjištění největšího společného dělitele, dále NSD, využijeme Euklidova algoritmu. Pokud celé číslo d dělí celá čísla a a b , nutně dělí i jejich rozdíl $a - b$. Euklidův algoritmus spočívá právě v opakování tohoto kroku do té doby, dokud nedostaneme dvě čísla, které se rovnají, nebo číslo 1 (v takovém případě jsou čísla nesoudělná, a 1 je tak jejich největší společný dělitel). Ty jsou pak rovny NSD(a, b). V praxi tedy postup pomocí Euklidova algoritmu bude vypadat následovně:

$$8n + 37 - (3n + 14) = 5n + 23,$$

$$5n + 23 - (3n + 14) = 2n + 9,$$

$$3n + 14 - (2n + 9) = n + 5,$$

$$2n + 9 - (n + 5) = n + 4,$$

$$n + 5 - (n + 4) = 1.$$

Vzhledem k tomu, že jsme se dostali k číslu 1, už není potřeba pokračovat dále, protože původní čísla jsou nesoudělná. Výsledek tedy je, že bez ohledu na hodnotu n může přijít vždy jen jeden host.

2. způsob: Urychlíme si práci s Euklidovým algoritmem. Pokud číslo d dělí číslo a , bude dělit i všechny jeho celočíselné násobky. Pokud tedy $d = \text{NSD}(8n + 37, 3n + 14)$, pak d dělí kromě $8n + 37$ a $3n + 14$ i jejich následující násobky, které

zvolíme tak, abychom se po odečtení zbavili členu s n ; $3 \cdot (8n + 37)$ a $8 \cdot (3n + 14)$. Číslo d bude dělit i rozdíl těchto dvou čísel, ten ale bude roven $24n + 112 - (24n + 111) = 1$. Číslo 1 má jen jednoho přirozeného dělitele, kterým musí být d , a to je ono samo. Opět tedy dostáváme, že $\text{NSD}(8n + 37, 3n + 14) = 1$. Opět tedy mohou pozvat jen jednoho hosta.

Komentář: Naprostá většina řešitelů postupovala jedním ze dvou způsobů a zdárně se dopracovala ke správnému výsledku. Většina řešení navíc pěkně zdůvodňovala platnost Euklidova algoritmu, což chválím :)

Úloha č. 6

Carlos má své oblíbené číslo n . To má právě 2026 dělitelů. Kolik dělitelů má $n \cdot n \cdot n$? Určete všechny možnosti a dobře popište, jak jste se k výsledkům dostali.

Řešení: Než začneme s počítáním příkladu, tak si určíme, jak se dá vypočítat počet dělitelů libovolného čísla n . Pomocí prvočíselného rozkladu můžeme napsat libovolné přirozené číslo jako násobek mocnin prvočísel. Například $24 = 2^3 \cdot 3^1$. Dělitel pak bude takové číslo, které můžeme zapsat jako násobek stejných čísel, které ale budou mít mocniny menší nebo stejné jako naše původní číslo (včetně nuly). Každá takováto kombinace mocnin nám dá jednoho dělitele, tedy počet těchto kombinací se bude rovnat počtu dělitelů. U dříve zmíněného 24 to vychází na 4 kombinace u mocnin čísla 2, a pro každou z nich existují 2 kombinace mocnin nad 3. Vychází to tedy na 8 dělitelů.

Jak by se toto promítlo obecně? Zapišme si prvočíselný rozklad $n = p_1^a \cdot p_2^b \cdot \dots$ (p_i jsou zde různá prvočísla). Počet dělitelů pak bude, jak jsme si výše ukázali, počet možností pro první mocninu (to je $a + 1$) krát počet možností pro druhou mocninu (to je $b + 1$) a tak dále pro další prvočísla z rozkladu. Matematicky zapsáno jako $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot \dots$

Jak se to tedy vztahuje na naši úlohu? Zjistíme, jak by mohl vypadat prvočíselný rozklad pro číslo n ze zadání. Počet dělitelů 2026 musíme být schopni napsat ve formátu napsaném výše, tedy jako násobek několika čísel. Jelikož prvočíselný rozklad 2026 je $2 \cdot 1013$, tak máme jen dvě možnosti: $2026 \cdot 1$ a $2 \cdot 1013$.

Možnost $2026 \cdot 1$ je jednoduchá. Po dosazení do vzorce zjistíme, že prvočíselný rozklad by vypadal $n = p^{2025}$. Z toho plyne $n^3 = p^{6075}$ a opět pomocí dosazení do vzorce zjistíme, že by toto číslo mělo 6076 dělitelů.

$2 \cdot 1013$ je trochu složitější, ale postup je stejný. Prvočíselný rozklad by vypadal $n = p_1^1 \cdot p_2^{1012}$, třetí mocnina by vypadala $n^3 = p_1^3 \cdot p_2^{3036}$. Toto po dosazení vzorce bude mít 12148 dělitelů.

Možnosti, kolik bude mít n^3 dělitelů, jsou dvě, a to 6076 a 12148.

Komentář: Pár řešitelů zapomnělo na možnost $1 \cdot 2026$, což ale byla malá chybička. Hodně řešení bylo moc pěkné a srozumitelně sepsáno, což velmi cením u takto těžké úlohy :)

Úloha č. 7

V Andách je 15 horských měst. Mezi každými dvěma vede horská stezka, přičemž žádné dvě stezky se nekříží (některé stezky jsou v tunelech nebo na mostech). Z těchto stezek je 6 mimořádně krásných. Z každého města vede maximálně jedna mimořádně krásná stezka. Pedro začíná ve městě Cuzco a chce obejít všechna města tak, že každé navštíví právě jednou a vrátí se zpátky do Cuzca. Přitom chce projít všemi mimořádně krásnými stezkami. Kolika způsoby to může udělat? Výsledek zdůvodněte.

Řešení: Když přijde Pedro do města po normální stezce a vede z něj mimořádně krásná, musí po ní odejít. Díky podmínce ze zadání, že do každého města vede maximálně jedna mimořádně krásná stezka, nám města spojená těmito stezkami vytváří dvojice, po kterých musí Pedro jít. Pro každou dvojici pak platí, že může být procestována dvěma směry. Můžeme na každou tedy nahlížet jako na samostatné město a pak spočítat, kolik možných posloupností tohoto redukováného množství měst je. Nakonec výsledek musíme vynásobit množstvím kombinací směrů, jakými Pedro půjde po mimořádně krásných stezkách. Konkrétně 6 mimořádně krásných stezek redukuje 15 měst na 9. Pedro v jednom z nich začíná, takže je $8!$ posloupností. Jelikož máme 6 stezek a každá má dva směry, je celkem 2^6 kombinací směrů. Celkem tedy vyjde $8! \cdot 2^6 = 2580480$ způsobů. Je nutné podotknout, že nezáleží na tom, jestli je počáteční město Pedra spojeno překrásnou stezkou, protože po této stezce může odejít na začátku, či přijít až na konci.

Komentář: Velké množství řešitelů našlo správné řešení. Nejčastější chybou bylo počítání možností odděleně pro situace, kdy do Cuzca (ne)vede mimořádně krásná stezka.

Úlohy čtvrté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 2. Eliška Vimmerová a Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 3. Vít Houfek, 4. Adam Dřinec, 5. Lukáš Koucký, 6. Vít Kaděra, 7. Martin Vagner