

Vzorová řešení a komentáře k 3. sérii úloh

Úloha č. 1

Lachtan Lach a lachtan Tan chytali včera ryby. Kdyby Lach nachytal dvakrát tolik ryb, než kolik jich včera nachytal, měli by dohromady 11 ryb. Kdyby Tan nachytal třikrát tolik ryb a Lach dvakrát tolik, měli by dohromady 21 ryb. Určete, kolik ryb včera nachytal Lach a kolik jich nachytal Tan. Postup zdůvodněte.

Řešení:

Víme že Lach a Tan spolu ulovili nějaký počet ryb. Toto můžeme označit jako

$$1L + 1T = ?.$$

Také víme, že kdyby Lach nachytal dvakrát tolik ryb než nachytal a Tan stejně, budou mít 11 ryb dohromady. Toto označíme jako $1L + 1L + 1T = 11$, neboli

$$2L + 1T = 11.$$

Kdyby Lach nachytal dvakrát tolik ryb a Tan nachytal třikrát tolik ryb, než kolik jich ve skutečnosti nachytali, dohromady budou mít 21 ryb. To zapíšeme jako

$$2L + 3T = 21.$$

Následně vezmeme $2L + 1T = 11$ a odečteme tuto rovnici od $2L + 3T = 21$ tím, že od sebe odečteme stejné proměnné. Dostaneme tedy

$$2L - 2L + 3T - 1T = 21 - 11.$$

Z tohoto se po odečtení všech proměnných stane $2T = 10$. Tuto rovnici vydělíme dvěma a dostaneme $1T = 5$. Když dosadíme do rovnice $2L + 1T = 11$, zjistíme, že $2L = 6$, tedy $1L = 3$.

Lachtan Lach tedy chytil 3 ryby a Lachtan Tan chytil 5 ryb.

Komentář: Správný výsledek našli všichni řešitelé, někteří bohužel zapomněli zapsat svůj postup, jak se dostali k výsledku.

Úloha č. 2

Skupina 33 tučňáků se baví o tom, kdo se rád klouže po ledě a kdo rád skáče šipky. Zjistili, že 10 z nich nemá rádo ani jedno a 7 má rádo obojí. Pokud víme, že počet tučňáků, kteří se rádi kloužou po ledě, je stejný jako počet tučňáků, kteří rádi skáčou šipky. Určete, kolik tučňáku rádo skáče šipky a výsledek zdůvodněte.

Řešení: Vzhledem k tomu, že 10 tučňáků se ani rádo neklouže, ani rádo ne-skáče šipky, nás bude zajímat jen zbývajících 23. Z těchto 23 tučňáků mají všichni určitě rádi aspoň jednu ze dvou aktivit. Konkrétně 7 má rádo oboje a zbývajících 16 pouze jednu aktivitu. Navíc počet tučňáků co se rádi kloužou k je stejný, jako počet tučňáků co rádi skáčou šipky s. Platí tedy:

$$s = k,$$

$$(s - 7) + (k - 7) = 16.$$

Vzhledem k rovnosti neznámých můžeme dosadit za klouzající se tučňáky, počet tučňáků, co rádo skáče šipky, který nás zajímá. Tím dostaneme rovnici o jedné neznámé:

$$(s - 7) + (s - 7) = 16,$$

$$2s - 14 = 16,$$

$$2s = 30,$$

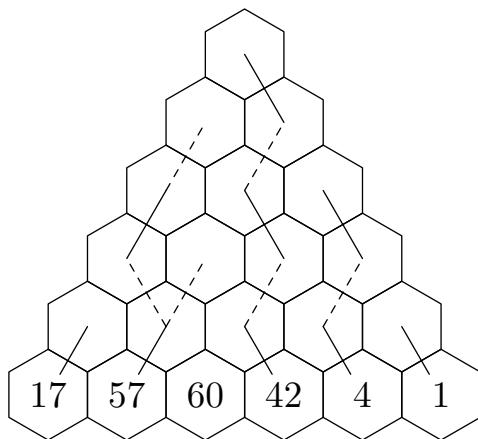
$$s = 15.$$

Je tedy 15 tučňáků, co rádo skáče šipky.

Komentář: Naprostá většina řešitelů správně určila počet tučňáků a výsledek i správně okomentovala (nejvíce řešitelů postupovalo podobným výpočtem jako v zadání, někteří pro větší názornost využili Vennových diagramů). Část řešitelů ale zapomněla na to, že pokud má tučňák rád obojí, musí nutně i rád skákat šipky. Výsledek jim tedy vyšel o 7 méně.

Úloha č. 3

Rico a Kowalski hrají hru, ve které se figurka pohybuje po hrací ploše na obrázku 1, přitom figurka začíná v políčku úplně nahoře. Cílem Rica je dostat figurku na co nejmenší číslo, zatímco Kowalski chce co největší číslo. Hráči se střídají v tazích, začíná Rico. V každém tahu hráč posune figurku o patro níže na libovolné sousední políčko. Hra končí, když figurka dosáhne spodního patra. Pokud oba hrají optimálně, na kterém políčku figurka skončí? Popište strategie hráčů.



Obr. 1

Řešení: Očíslujeme si patra zespodu 0, 1, 2, 3, 4, 5. Podle popsanych pravidel hry bude Rico na tahu, když je figurka na patrech 5, 3, 1 a Kowalski na patrech 4, 2.

Pro každé políčko si zakreslíme optimální tah hráče, který je právě na tahu. Na plátku jsou plné čáry tahy, které by zahrál Rico, přerušované čáry jsou tahy, které by zahrál Kowalski.

Začneme je zakreslovat zespodu. Na patře 1 bude na tahu Rico, který chce dosáhnout co nejmenšího čísla. Ať už bude na kterémkoliv políčku tohoto patra, optimální je pro něj vybrat si menší ze dvou možných čísel.

Na patře 2 před Ricem ale hraje Kowalski. Má na výběr pouze dvě možnosti. Moc dobře si ale dokáže odvodit budoucí tah Rica. Proto si vybere tu možnost, která Rica zavede k většímu číslu (tu, která je pro něj v ten moment optimální).

Stejným způsobem doplníme i všechna ostatní patra. Takto vlastně každý hráč určí svůj optimální tah na základě znalosti všech budoucích optimálních tahů.

Jak vidíme z obrázku 1, tímto postupem nám vznikne pouze jedna souvislá cesta vedoucí z vrchu až dolů, což je naše optimální cesta. Díky ní víme, že pokud oba hráči hrají jak nejlépe mohou, figurka skončí na čísle 42.

Komentář: Ne mnoho řešitelů použilo způsob ze vzorového řešení, ale spíše intuici. Za tento postup, pokud nebyl dostatečně dobře odůvodněn, byly strhuty body. Drtivá většina řešitelů ale vyřešila úlohu bezchybně.

Úloha č. 4

Kaya by si ráda z ledu vysekala trojboký jehlan s celočíselnými délkami hran. Chtěla by, aby všechny hrany měly různé délky a celkově aby součet délek hran byl 25 cm. Může si takový jehlan z ledu vysekat?

Řešení: Nejprve se podívejme, jak trojúhelníková nerovnost ovlivní tento příklad. Ta tvrdí, že pro každou kombinaci stran a, b, c trojúhelníku platí $a + b > c$.

Předpokládejme, že jedna hrana jehlanu bude mít délku jedna. Ta musí být součástí dvou stěn, které jsou trojúhelníky, takže pro ně bude platit trojúhelníková nerovnost. Podívejme se na tyto nerovnosti pro jednu ze stěn. Zbylé hrany si označíme a, b tak, aby platilo $a > b$. Musí platit trojúhelníková nerovnost $b + 1 > a$, po úpravě $1 > a - b$. Jelikož a, b jsou celá čísla, a je větší než b a zároveň $a \neq b$, je jejich rozdíl alespoň 1. Nerovnost tedy nemůže platit. V jehlanu proto nemá žádná hrana délku 1.

Podívejme se, který nejmenší součet délek hran můžeme bez 1 získat. Trojboký jehlan má 6 hran, tedy nejmenší součet je $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ cm. To je ale více než požadovaných 25 cm a tím pádem takový jehlan sestavit nelze.

Komentář: Trik v této úloze bylo vzpomenout si na trojúhelníkovou nerovnost. Byl jsem mile překvapen, že drtivá většina řešitelů si toto uvědomila a tedy dostala i plný počet bodů.

Úloha č. 5

John Smith se snaží dostat do výzkumné stanice Vostok, ale zapomněl čtyřmístný pin kód. Naštěstí si pamatuje cifry, ale zapomněl jejich pořadí. John: „Achjo, to musím vyzkoušet 12 možností.“ Přicupital tučňák a říká: „Johne, pokud se cifra v pinu rovná druhé mocnině nějakého celého čísla, pak sousedí pouze s nižšími ciframi.“ John: „Skvělé! To už mám jen šest možností.“ Tučňák: „A taky ten pin má na druhém místě pětku.“ John: „Tak to už vím!“

Rico slyšel tento rozhovor a chce se dostat do stanice. Pomozte mu. Na zadání pin kódu má však jen tři pokusy. Napište, které piny má zkusit, a dobře popište, proč zrovna tyto.

Řešení:

Pokud by se pin skládal ze čtyř různých cifer, měl by John celkem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností, jak cifry za sebou napsat. Vzhledem k tomu, že má možností jen 12, musí se v něm některá cifra opakovat. Všimněme si, že počet možností je poloviční. Tato situace nastane, když máme právě jednu dvojici stejných cifer. Uvědomme si, že při opakování cifer můžeme nejdříve brát všechny cifry jako

různé a až poté stačí vydělit počtem způsobů, kolika můžeme stejné cifry zapsat za sebou. Pro dvě stejné cifry tak máme dva způsoby, jak toho docílit, a 24 tedy dělíme 2, což je skutečně 12. Obecně pro každých n stejných cifer musíme počet možností dělit $n!$, pro n větší než 2 by tedy John měl způsobů podstatně méně.

Kód tedy obsahuje jednu dvojici stejných cifer a dvě unikátní cifry.

Cifry, které jsou druhou mocninou celého čísla, mohou být 0, 1, 4 nebo 9. Informace o nich snížila počet možností, takže alespoň jedna se v kódu musí nacházet.

Cifry sousedící s 0 by musely být menší než 0, což nelze. Kód tedy neobsahuje 0. Podobně, cifry sousedící s 1 by musely být 0, takže kód neobsahuje ani 1.

Pokud kód neobsahuje 4, musí obsahovat 9. Kdyby obsahoval právě jednu 9, všechny ostatní cifry by byly menší, takže by tučňákova nápověda nesnížila počet možností. Kód v tomto případě tedy obsahuje dvě devítky, které spolu nesousedí, takže je ve tvaru 95a9 nebo 959a. Pro každé a obě tyto možnosti splňují podmínky tučňákových nápověd, takže John je nemůže odlišit od sebe.

Kód tedy obsahuje 4. Tato 4 nemůže sousedit s 5 na druhém místě, takže musí být na čtvrtém místě a kód je ve tvaru a5b4 pro nějaké cifry a a b . Z podmínky o druhých mocninách víme, že a není 4 a že b je menší než 4.

Pokud $a = 5$, je b jediná cifra menší než 4, takže už po první nápovědě by ví, že 4 musí sousedit pouze s b . Díky tomu má John pouze jednu možnost možnost (55b4), místo šesti.

Víme tedy, že a ani b není 4 ani 5 a mezi ciframi je jedna dvojice stejných, takže $a = b$. Zároveň b je menší než 4 a nemůže být 1 nebo 0, takže jediné dvě možnosti jsou 2524 a 3534. Snadno můžeme ověřit, že obě splňují podmínky v zadání.

Komentář: Tato úloha byla poměrně těžká, zejména množstvím kroků, které bylo potřeba zdůvodnit. Nejčastějším problémem bylo neuvědomění si, že tučňákova první rada omezí počet možností, pokud jsou v pinu dvě devítky.

Úloha č. 6

Do ledovce je vysekaný obrázek obdélníku ABCD a vevnitř bod M jako na obrázku 2, přičemž $|AM| = 8$ cm, $|BM| = 4$ cm, $|DM| = 7$ cm. Určete $|CM|$ a dobře popište, jak jste se k výsledku dostali.

Řešení: Řešení začneme tím, že si celou situaci nakreslíme, stejně jako vidíme na obrázku 2. Do obrázku jsme doplnili také dvě úsečky rovnoběžné se stranami trojúhelníku, které se protínají v bodě M. Malými tiskacími písmeny jsme ozna-

čili strany čtyř menších obdélníků, na které dvě nové úsečky velký obdélník dělí. Podle Pythagorovy věty můžeme vyjádřit čtyři následující rovnice:

$$a^2 + c^2 = 7^2,$$

$$b^2 + c^2 = 8^2,$$

$$b^2 + d^2 = 4^2,$$

$$a^2 + d^2 = x.$$

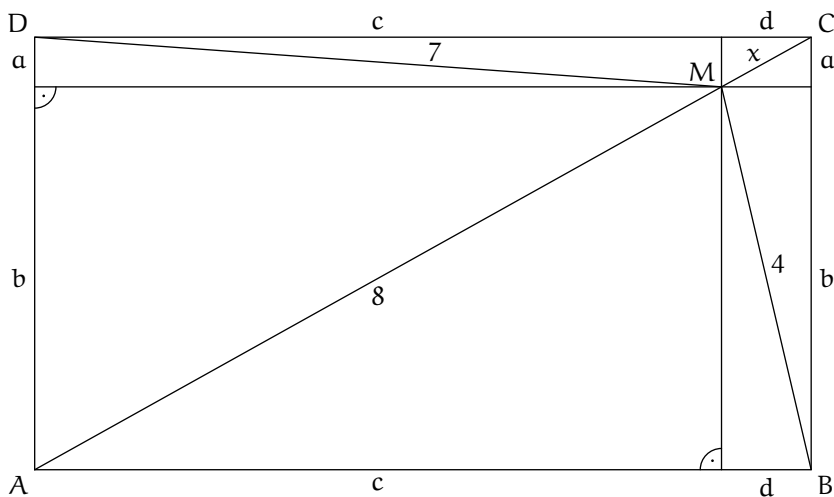
Nyní se z této soustavy rovnic pokusíme vyjádřit neznámou x . Jelikož máme pět neznámých na čtyři rovnice, je možné, že budeme mít smůlu a x se nám vyjádřit nepodaří a budeme muset u řešení příkladu postupovat jiným způsobem. Nicméně v našem případě máme štěstí – sečteme-li druhou a čtvrtou rovnici a odečteme-li od ní první a třetí, neznámá x se nám osamostatní:

$$b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - a^2 - c^2 - b^2 - d^2 = 8^2 + x - 7^2 - 4^2$$

$$0 = x + 64 - 49 - 16$$

$$x = 1$$

Délka strany CM je tedy 1 cm.



Obr. 2

Komentář: Tato úloha byla trochu náročnější, jelikož od řešitelů vyžadovala schopnost vyřešit netriviální soustavu rovnic. Nicméně většina z nich si s úlohou i tak bez větších problémů poradila.

Úloha č. 7

Tučnák Apuk našel na své procházce číslo x , pro které platí $x^3 + x^2 = 1$. Apuk si všiml, že

$$\frac{1}{1-x} = Ax^2 + Bx + C,$$

kde A, B, C jsou nějaká celá čísla. Určete A, B, C a dobře popište, jak jste k výsledku došli. Čísla A, B, C zapište jako čísla složená pouze z číslic. Čísla A, B, C určete taková, aby byla rovnice splněna pro každé x , které splňuje $x^3 + x^2 = 1$.

Řešení: Začneme úpravou 1. rovnice. Od té můžeme odečíst x^2 a dostat tak

$$x^3 = 1 - x^2.$$

Dále upravíme 2. rovnici. Tu můžeme vynásobit $1 - x$, jelikož $x \neq 1$ (pokud by $x = 1$, tak z první rovnice $1^3 = 1 - 1^2$, což neplatí). Touto úpravou dostaneme

$$1 = (1 - x)(Ax^2 + Bx + C)$$

a následně upravíme pravou stranu a získáme

$$1 = -Ax^3 + (A - B)x^2 + (B - C)x + C.$$

Do této rovnice můžeme dosadit 1. rovnici a nahradit člen x^3 :

$$1 = -A(1 - x^2) + (A - B)x^2 + (B - C)x + C.$$

Dále upravíme pravou stranu:

$$1 = (2A - B)x^2 + (B - C)x + (C - A).$$

Jedno z řešení této rovnice bude

$$(2A - B)x^2 = 0, (B - C)x = 0, (C - A) = 1.$$

Aby tyto tři rovnice platily pro všechna x splňující první rovnici, tak

$$2A - B = 0, B - C = 0, C - A = 1$$

(aby součin dvou čísel byl nula, tak alespoň jedno z nich musí být nula, přičemž $x \neq 0$, tedy to musí být ten druhý činitel).

Sadu nových rovnic upravíme na $2A = B$, $B = C$, $C - 1 = A$. Třetí a druhou rovnici dosadíme do první: $2C - 2 = C$; a dostaneme $C = 2$. To můžeme dosadit do druhé i třetí rovnice a získáme $B = 2$, $A = 2 - 1 = 1$.

Jedno z možných celočíselných řešení příkladu je $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$.

Úlohy třetí série opravovali a komentáře sepsali: 1. Vojtěch „Kaneč“ Kadlec, 2. Lukáš Koucký, 3. Vojtěch „Kaneč“ Kadlec, 4. Vítek Kaděra, 5. Tomáš Flidr, 6. Adam Dřínek, 7. Dan Školař