

Vzorová řešení a komentáře k 2. sérii úloh

Úloha č. 1

Anippe vyplňovala formulář (dne 20. října 2025), ale omylem prohodila poslední dvě cifry v roce svého narození. Tímto činem jakoby zestárla o 36 let. Kolik je Annipe doopravdy let, pokud víme, že jí ještě nebylo 36?

Řešení: Pokud víme, že Anippe ještě nebylo 36 let, tak to znamená, že se musela narodit po roce 1989.

$$2025 - 36 = 1989$$

Nyní můžeme určit, že se musela narodit ve 20. století, protože největší možný rozdíl mezi proběhlými roky ve 21. stoletím je 25. Tím pádem víme, že se narodila mezi roky 1990 – 1999. Předposlední číslice musí být 9 a nyní hledáme rok s rozdílem 36 let, kde se poslední dvě cifry vymění. Na to odpovídá pouze číslice 5, protože $1995 - 1959 = 36$. Anippe se narodila v roce 1995, tím pádem jí je 30 let.

Úloha č. 2

Ramesses napsal do písku pět přirozených čísel

$$0 < a < b < c < d < e,$$

jejichž součet je 31. Víme, že e je třikrát větší než a . Jaké číslo představuje proměnná d ?

Řešení:

Podívejme se na různé hodnoty a a e . Kdyby a bylo 1, e by muselo být 3, tedy nemůžeme najít 3 přirozená čísla mezi a a e . Kdyby a bylo 2, e musí být 6. V tomto případě musí platit $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$ a to je dohromady pouze 20.

Podívejme se na případ, když by Ramesses napsal do písku $a = 3$, $e = 9$. Máme více možností jak zde rozložit čísla, ale nejdříve zkusíme jestli nebude fungovat $a = 4$. Pokud Ramesses napíše $a = 4$, $e = 12$, tak s nejnižšími čísly ($b = 5$, $c = 6$, $d = 7$) budeme mít součet 34 což je moc a to samé bude platit pro větší hodnoty. Tudíž platí $a = 3$, $e = 9$. Součet $b + c + d$ musí být $31 - 9 - 3 = 19$. Aby toto vyšlo tak musíme mít lichý počet lichých čísel. Máme mezi 3 a 9 jen 2

lichá čísla, a to 5 a 7, použijeme tedy jen jedno z nich. Při použití 5 potřebujeme součet ostatních čísel 14, takže musíme dosadit $6 + 8$, což znamená že $d = 8$. Použijeme-li 7, součet čísel musí být 12, takže musíme dosadit $4 + 8$. V obou případech nám na 2. největší číslo připadá 8, proto $d = 8$.

Úloha č. 3

V osadě žijí jen velmi zásadoví lidé, kteří se ale dělí na dvě skupiny – poctivci a padouši. Poctivci vždy mluví pravdu a padouši vždy lžou. V následující úloze zjistěte, kdo je padouch a kdo poctivec.

V osadě jsme potkali tři obyvatele: Alfréda, Blaženu a Cyrila. Zeptali jsme se Alfréda: „Jsi padouch nebo poctivec?“ Alfréd odpověděl potichu, takže jsme mu nerozuměli. Zeptali jsme se tedy Blaženy: „Co řekl Alfréd?“ Blažena odpověděla: „Alfréd říkal, že je padouch.“ V tom okamžiku Cyril dodá: „Nevěř Blaženě, ta lže!“

Řešení: Nejprve se zamysleme nad tím, co může člověk žijící v osadě odpovědět na otázku: „Jsi padouch nebo poctivec?“. Jestliže je poctivec, odpoví „poctivec“, padouši ale kvůli svému lhaní odpoví, že jsou také poctivci. Kvůli tomuto Alfréd nikdy nemohl říct, že je padouch, tudíž Blažena lže. Cyril dodal pravdivou větu, takže je poctivec. O Alfrédovi nemůžeme rozhodnout, jelikož ani odpovědi Blaženy a Cyrila nám o jeho identitě nic nenapoví.

Úloha č. 4

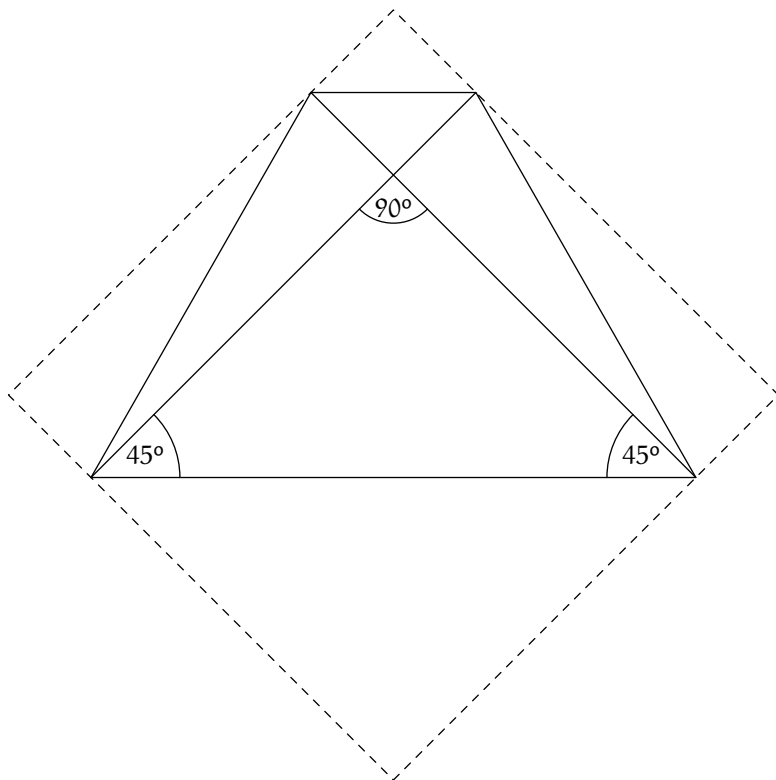
Emil má pole tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Délka úhlopříčky jeho pole je 144 metrů, přitom úhlopříčka svírá úhel 45 stupňů se základnou lichoběžníku. Určete obsah Emilova pole.

Řešení: K řešení této úlohy se lze dostat několika způsoby. Ve vzorovém řešení si ukážeme 2.

1. způsob: Obě úhlopříčky lichoběžníku svírají se základnou úhel 45 stupňů. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů, úhlopříčky tedy mezi sebou svírají úhel $180 - 45 - 45 = 90$ stupňů.

Sestrojíme rovnoběžky s úhlopříčkami ve vrcholech lichoběžníku jako na obrázku 1. Tím lichoběžník doplníme na čtverec o délce strany 144 metrů. Úhlopříčky rozdělují lichoběžník na 4 pravoúhlé trojúhelníky. Čtverec obsahuje každý z těchto trojúhelníků dvakrát. Obsah lichoběžníku se proto rovná polovině obsahu tohoto čtverce: $\frac{144 \cdot 144}{2} = 10\,368 \text{ m}^2$.

2. způsob: Označíme vrcholy lichoběžníku A, B, C, D, P průsečík kolmice na základnu procházející bodem C se základnou AB a X průsečík kolmice na základnu procházející bodem A se základnou CD.

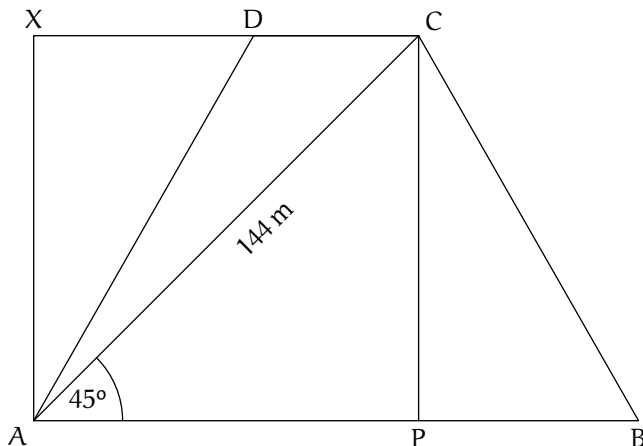


Obr. 1

Trojúhelníky PBC a XDA jsou shodné podle věty *Ssu*, protože $|BC| = |AD|$ (ramena rovnoramenného lichoběžníku), $|PC| = |AX|$ (výška lichoběžníku) a úhly DXA a BPC jsou pravé. Čtyřúhelník APCX tak bude mít stejný obsah jako lichoběžník ABCD.

APCX je čtverec, protože všechny jeho strany jsou na sebe kolmé a úhlopříčka svírá se stranou úhel 45 stupňů. Ze zadání známe délku jeho úhlopříčky. Z Pythagorovy věty víme: $|AC|^2 = |AP|^2 + |XA|^2$, protože se jedná o čtverec, $|AP|^2 + |XA|^2 = 2|AP|^2$ Spočítáme jeho obsah APCX:

$$S_{APCX} = |AP|^2 = \frac{|AC|^2}{2} = \frac{144^2}{2} = 10\,368 \text{ m}^2$$



Obr. 2

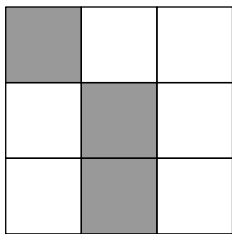
Komentář: Většina řešitelů zvolila 2. způsob řešení, více než polovina dostala plný počet bodů. Nejčastějšími chybami pak bylo nezdůvodnění, že APCX je čtverec nebo nedokázání shodnosti trojúhelníků PBC a XDA. Několik řešitelů si ztížilo práci goniometrickými funkcemi, což samozřejmě není chyba, ale Pikomati úlohy většinou lze vyřešit i bez nich.

Úloha č. 5

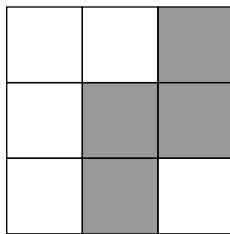
Isesi a Khufu stojí na sousedních stranách čtvercového prostranství, které je čtvercovou mřížkou řek rozdělené na 2025×2025 ostrůvků. Hráči se střídají v tazích, přičemž Khufu začíná. V každém tahu si hráč vybere jeden prázdný ostrůvek a hodí na něj oblázky své barvy (Isesi má hnědé oblázky a Khufu šedé). Hráč nemusí vybírat sousední ostrůvky, může i jednou hodit doprostřed a pak do rohu. Vyhraje ten, kdo bude moci jako první přejít na protější stranu celého prostranství jen po své cestě ostrůvků. Může některý z hráčů zaručeně vyhrát, pokud oba hrají optimálně? Pokud ano, dobře popište vyhrávající strategii. Pokud ne, ukažte strategii, která výhře vždy zabrání.

Varianty:

- Stačí, aby ostrůvky cesty sousedily hranou nebo vrcholem, podobně jako na obrázku 3. (2 body)*
- Ostrůvky cesty musí sousedit přes hranu, podobně jako na obrázku 4. (3 body)*



Obr. 3



Obr. 4

Řešení: Uvažujme, že Khufu se snaží svými šedými kamínky spojit levou a pravou stranu, zatímco Isesi se snaží svými hnědými oblézky spojit přední a zadní stranu.

Začneme částí a). Khufu si vybere dva sousední řádky, řekněme jim oblast R, kde bude budovat svoji cestu na protější břeh. Pokud se mu podaří v rámci R obsadit jeden ostrůvek každého sloupce, spojí tím své břehy a vyhraje. Když Isesi obsadí nějaký ostrůvek v R a Khufu ještě v R tento sloupec nemá, hned obsadí ten druhý ostrůvek v R daného sloupce. V ostatních případech Khufu hodí kámen libovolně do R, kde je zcela volný sloupec. Khufu tak vyhraje po 2025 tazích. Isesi určitě vyhrát nemůže, protože má zatím jen 2024 obsazených ostrůvků.

Můžeme tedy přejít k části b). Tady to bude složitější, protože blokace už nejde obejít jedním tahem. Protože oba soupeři mohou znemožnit výhru, dojde vždy k remíze. Každý hráč si vybere dva řádky/sloupce vedle sebe a postupuje stejnou strategií, jakou měl Khufu v části a). Tím dokáže zablokovat průchod druhého hráče skrz vlastní oblast.

Úloha č. 6

Máme 42 modrých, 17 červených a 23 zelených diamantů. Diamanty se dají vyměňovat zajímavým způsobem: za dva diamanty různých barev dostaneme diamant třetí barvy. Pokud nám na konci zbyl pouze jeden diamant, jakou měl barvu?

Řešení:

Dle zadání se diamanty vyměňují tak, že za dva diamanty různých barev dostaneme diamant třetí barvy. Toto se dá vyjádřit jako -1 od jedné barvy, -1 od druhé barvy a $+1$ ke třetí barvě. Při takovéto výměně diamantů se musí změnit parita počtu diamantů dané barvy. Parita je vlastnost čísla být sudé nebo liché.

Ať už přičteme nebo odečteme 1, určitě se parita změní. Pokud nám tedy má

zůstat pouze jeden diamant, budeme mít dvě čísla se sudou paritou a jeden s lichou. Čísla se sudou paritou budou mít po celé vyměňování stejnou paritu. Díky tomuto nám stačí zjistit, který počet diamantů má na začátku rozdílnou paritu, abychom zjistili, který diamant nám zůstane jako poslední.

Jelikož máme dva liché (zelené a červené diamanty) a jeden sudý (modré diamanty), tak jako poslední diamant bude muset zůstat ten modrý.

Komentář:

Mnoho řešitelů na řešení šlo postupem ručního vyměňování, které je většínou dostalo ke správnému výsledku. Úskaliskem tohoto postupu ale je, že se v postupu může řešitel splést, a i když se nesplete, tak vyměňování nedokazuje, že modrá musí vyjít pokaždé.

Úloha č. 7

Geb si napsal rovnici $2^x = 2 \cdot 3^y + 2 \cdot 3^z$. Pomozte mu najít všechny trojice nezáporných celých čísel x, y, z , kde $y < z$. Také ukažte, proč neexistují žádné další vyhovující trojice.

Řešení:

$$2^x = 2 \cdot 3^y + 2 \cdot 3^z$$

Vydělíme 2 a z pravé strany vytkneme 3^y :

$$2^{x-1} = 3^y \cdot (1 + 3^{z-y}).$$

Pokud by $y \geq 1$, tak pravá strana bude násobek 3. Levá strana ale nikdy není násobek 3. Pak $y < 1$ a tedy $y = 0$. Rovnice vypadá takto:

$$2^{x-1} = 1 \cdot (1 + 3^{z-y}).$$

Teď zjistíme, že pravá strana nikdy není dělitelná osmi. 3^n bude vždy dávat zbytek 1 nebo 3 po dělení osmi. To se dokáže pomocí matematické indukce.

- Pro $n = 0$ máme $3^0 = 1$. To dává zbytek 1 po dělení osmi.
- V indukčním kroku předpokládáme, že 3^n dává zbytek 1 nebo 3 po dělení osmi a snažíme se dokázat, že tomu tak bude i pro 3^{n+1} . Pokud 3^n dává zbytek 1 po dělení osmi, pak $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$ dává zbytek $1 \cdot 3 = 3$ po dělení osmi. Pokud 3^n dává zbytek 3 po dělení osmi, pak $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$ dává zbytek $3 \cdot 3 = 9$ po dělení osmi. Zde ale od zbytku musíme ještě odečíst osm a zbytek bude pouze 1.

Z toho víme, že $1 + 3^n$ bude dávat zbytek 2 nebo 4 po dělení osmi. Tedy pravá strana opravdu nikdy není dělitelná osmi.

To znamená, že $x - 1 < 3$, jelikož každá větší mocnina dvojky je dělitelná osmi.

- Pokud $x - 1 = -1$, pak levá strana není celé číslo a pravá je, takže to nemůže být řešení.
- Pokud $x - 1 = 0$, pak $2^0 = 1 + 3^z$, $0 = 3^z$, což nemůže být řešení.
- Pokud $x - 1 = 1$, pak $2^1 = 1 + 3^z$, $1 = 3^z$, $z = 0$, což nevychází, jelikož $z > y$.
- Pokud $x - 1 = 2$, pak $2^2 = 1 + 3^z$, $3 = 3^z$, $z = 1$, což je správné řešení.

Existuje jen jeden výsledek, a to $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$.

Úlohy druhé série opravovali a komentáře sepsali: 1. Luisa Troupová, 2. Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 3. Adam Dřínek a Martin Vagner, 4. Matyáš Hazdra, 5. Alžběta Reitmayerová, 6. Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 7. Dan Školař