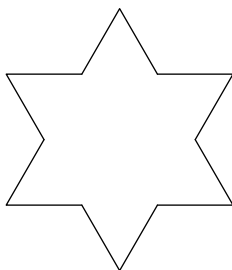


Vzorová řešení a komentáře k 1. sérii úloh

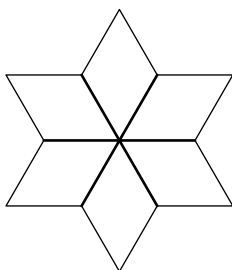
Úloha č. 1

Pravidelnou šesticípou hvězdu z obrázku 1 rozdělte třemi rovnými řezy na několik částí. Ze všech vzniklých částí složte jeden konvexní mnohoúhelník. Konvexní mnohoúhelník nemá díry a všechny jeho vnitřní úhly jsou menší nebo rovny 180 stupňům.



Obr. 1

Řešení: Hvězdu si můžeme rozřezat třemi přímkami například jako na obrázku. Toto rozřezání nám dá 6 stejných čtyřúhelníků, které následně můžeme poskládat za sebe tak, že nám vznikne čtyřúhelník se stejnými vnitřními úhly jako u šesti menších, ovšem delší strany budou šestkrát delší.



Obr. 2

Komentář: Většina řešitelů našla správné řešení, ovšem někteří neukázali, že hledaný čtyřúhelník opravdu lze vytvořit.

Úloha č. 2

Ptakopyskové jsou očíslováni přirozenými čísly od 1 do 5, ježury jsou očíslovány přirozenými čísly od 6 do 10. Někteří ptakopyskové se kamarádí s některými ježurami (každý může mít více kamarádek) tak, že:

- *každá ježura má takové číslo, jaký je součet čísel jejích ptakopyských kamarádů,*
- *každý ptakopysk má takové číslo, kterým je dělitelná alespoň polovina čísel jeho ježuřích kamarádek.*

Kamarádství je vzájemné, tedy když se ptakopysk kamarádí s ježurou, tak se ježura kamarádí i s ptakopyskem.

Řešení: Ježury si označíme J6–J10 a ptakopysky P1–P5. Ježury mohou mít následující kamarády, aby měli číslo rovné součtu jejich kamarádů:

$$10 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 + 1,$$

$$9 = 5 + 4 = 5 + 3 + 1 = 4 + 3 + 2,$$

$$8 = 5 + 3 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1,$$

$$7 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1,$$

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1.$$

J10, J9, J8 i J7 mají v každém součtu P4 nebo P5. Každá z nich se tedy musí kamarádit alespoň s jedním z těchto ptakopysků. 5 dělí pouze 10, takže P5 se musí kamarádit s J10 a maximálně s jednou další z ježur. 4 dělí pouze 8, takže P4 se musí kamarádit s J8 a maximálně jednou z dalších ježur.

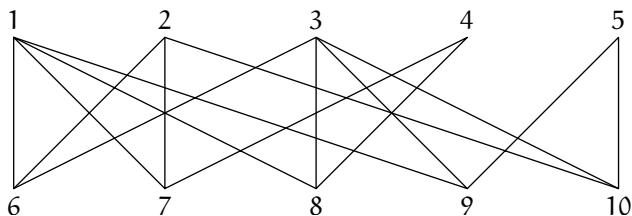
Oba P4 a P5 tedy mohou být v maximálně dvou součtech a jsou čtyři ježury, které je v součtu vyžadují. Tudíž každá z J10, J9, J8 a J7 se musí kamarádit s právě jedním z P4 a P5, přičemž P5 se musí kamarádit s J10 a právě jednou další ježurou a P4 se musí kamarádit s J8 a právě jednou další ježurou a zároveň J6 se nesmí kamarádit s P4 ani P5.

J10 se může kamarádit pouze s P5, P3 a P2, protože to je jediný ze součtů, který obsahuje 5 a neobsahuje 4. J8 se může kamarádit pouze s P4, P3 a P1, protože to je jediný ze součtů, který neobsahuje 5. J6 se může kamarádit pouze s P3, P2 a P1, protože to je jediný ze součtů, který neobsahuje ani 4 ani 5.

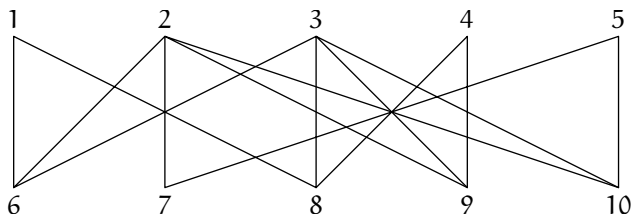
J9 se může kamarádit buď s P4, P3 a P2, nebo s P5, P3 a P1. V prvním případě

se musí J7 kamarádit s P5 a P2, protože je to jediný ze součtů, který neobsahuje 4, kterou už zabrala J9.

Ve druhém se musí J7 kamarádit s P4, P2 a P1. S P5 a P2 se kamarádit nemůže, protože P5 v tomto případě zabrala J9. S P4 a P3 se také nemůže kamarádit, protože P3 už se kamarádí se všemi ostatními a kvůli tomu, že 3 dělí pouze dvě čísla, může se kamarádit nejvýše se čtyřmi ježurami. Nemůže se ale kamarádit se všemi.



Obr. 3



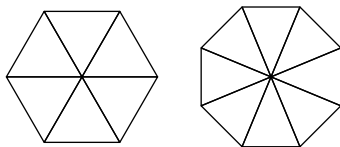
Obr. 4

Jediná možná řešení jsou na obrázcích 3 a 4.

Komentář: Většina řešitelů si s úlohou dobře poradila. Někteří řešitelé nenašli kamarády pro ježuru s číslem 7, protože je prvočíslem. I přesto je přece možné kamarádům ježury 7 najít další ježurí kamarády, které už dělí.

Úloha č. 3

Krokodýl Dundee jde do obchodu, kde prodávají dva druhy housek jako na obrázku 5. Jedny jsou rozděleny na 6 dílků a druhé na 8 dílků. Dundee chce koupit 17 housek tak, aby je mohl rozlámat na dílky a každé z 23 koal dát stejný počet



Obr. 5

dílků (dílků nelze dělit jinak, než jak je naznačeno na obrázku). Poradte mu, kolik si má koupit kterých. Případně dobře zdůvodněte, proč se mu to nemůže povést.

Řešení: Pokud Dundee rozláme všechny housky na 6 dílků, bude mít $17 \cdot 6 = 102$ dílků housek. Kdykoliv Dundee vymění jednu 6dílnou housku za 8dílnou housku, do celkového počtu dílků se přidají 2 dílky. Pokud vymění Dundee jednu housku, bude dohromady mít 104 dílků, pokud dvě, bude mít dohromady 106 dílků, a tak dále po sudých číslech. Pokud se Dundee rozhodne vyměnit všech sedmnáct housek, bude mít dohromady $17 \cdot 8 = 136$ dílků housek. Jediné možné počty dílků jsou tedy právě sudá čísla od 102 do 136.

Aby se Dundee mu povedlo rozdělit dílky spravedlivě, musí být počet dílků dělitelný 23. Podíváme se na násobky 23 mezi čísly 102 a 136. $102 : 23 = 4$ se zbytkem 10 a $136 : 23 = 5$ se zbytkem 21. To znamená, že jediný násobek 23 v rozmezí 102 až 136 je $23 \cdot 5 = 115$.

Bohužel toto číslo není sudé, a proto nemůže krokodýl Dundee spravedlivě rozdělit housky mezi svých 23 koalích kamarádek.

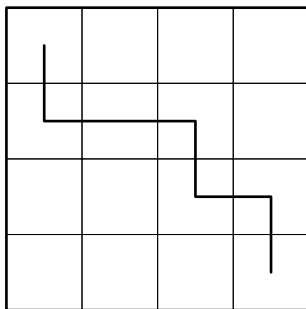
Komentář: Většina lidí úlohu vyřešila správně, ať už naším postupem, nebo vypsáním všech možností. Častou chybou bylo, že řešitelé neuvažovali o kombinacích 6dílných housek s 8dílnými, nebo pouze o kombinacích, které vycházely přesně pro 46 dílků (2 dílky pro každou koalou).

Úloha č. 4

Emu skáče po čtvercové mřížce o velikosti 25×25 . Vždy začne v levém horním rohu a skáče o jedno pole dolů, nebo doprava, až doskáče do pravého dolního rohu. Vždy při doskoku za sebou zanechá šlápotu. Pak se okolo mřížky vrátí zase do levého horního rohu. Kolikrát nejméně musí takto přeskákat celou tabulku, aby dokázal na každém políčku mřížky zanechat šlápotu? Celou strategii popište a zdůvodněte, proč mu méně skákání nevystačí.

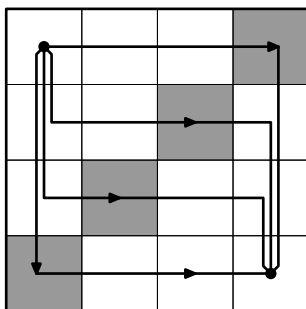
Jedno přeskákání zmenšené tabulky lze vidět na obrázku 6.

Řešení: Emu má mnoho různých strategií, které může použít. Jedna z nich je,



Obr. 6

že mřížku proskáče po řádcích. Konkrétně bude postupovat takto: při prvním průchodu mřížkou půjde prvním řádkem až doprava a pak pořád dolů. Při druhém průchodu půjde nejdříve o jedno políčko dolů na druhý řádek a pak opět úplně doprava a dolů. Při třetím průchodu sejde až na třetí řádek a následně bude postupovat obdobně. Jelikož má mřížka 25 řádků, musí emu celou mřížku proskákat 25krát.



Obr. 7

Nyní musíme ukázat, že mřížku nejde proskákat v méně krocích. Povšimněme si políček na vedlejší diagonále, vyznačených šedivou barvou (obr. 7). Můžeme si povšimnout, že ať naše strategie průchodu mřížkou bude jakákoliv, vždy během jednoho průchodu zvládneme navštívit jen jedno z těchto políček. Například pokud emu navštíví políčko na diagonále na druhém řádku, určitě už nenavštíví políčko na prvním řádku o jedna vpravo, jelikož nemůže skákat nahoru. Stejně

tak emu nenavštíví políčko na třetím nebo jakémkoliv dalším řádku, protože se nemůže vracet zpět doleva. Tím jsme dokázali, že emu potřebuje nejméně tolik proskákání mřížky, jako je políček na diagonále, tedy 25, což je i naše řešení.

Komentář: Většina řešitelů přišla na správné řešení, nicméně na odůvodnění s diagonálou přišel málokdo. Ukázka jedné možné strategie, jak mřížku procházet, na získání plného počtu bodů nestačí.

Úloha č. 5

Eliška má kouli o poloměru 2 cm. Kolem ní sestrojila co nejmenší drátovou krychli, tedy krychle měla pouze hrany a ty byly co nejvíce natěsno kolem koule. Jak dlouhé hrany tato krychle má? Výsledek zdůvodněte.

Řešení:

Krychle i koule mají společný střed, jelikož je oboje symetrické. Podíváme se na rovinu rovnoběžnou s jednou stranou krychle a procházející jejím středem. V této rovině je kruh o poloměru 2 cm a 4 body tvořící čtverec na obvodu toho kruhu. Délku strany tohoto čtverce vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, jelikož úhel $\alpha = 90^\circ$. $a^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$. Když rovnici odmocníme, dostaneme $a\sqrt{8}$ a jelikož naše rovina byla rovnoběžná se stranou krychle, tak a je délka hrany krychle.

Krychle má hranu délky $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} \doteq 2,83$.

Komentář: Bohužel kvůli špatné interpretaci úlohy (nebo nejasnému zadání) mnoho řešitelů řešilo jinou konfiguraci od zadání. Tato konfigurace však byla oproti původní úloze o dost snazší, tedy bylo těžší získat parciální body za postup.

Úloha č. 6

Vítek si do písku napsal přirozená čísla od 1 do 9. Vítek trojici čísel $a < b < c$ považuje za ošklivou, pokud $b - a = c - b$ (např. trojice 1, 4, 7 je ošklivá, jelikož $4 - 1 = 3 = 7 - 4$). Smažte co nejméně čísel z písku tak, aby ve zbylých číslech nezůstala žádná ošklivá trojice. Jedno řešení ukažte a popište, proč neexistuje řešení, které maže méně čísel.

Řešení: Jedno z řešení je například smazání čísel 3, 5, 6, 7 (Zbyde 1, 2, 4, 8, 9).

Teď musíme dokázat, že to nejde smazáním méně čísel, a to provedeme sporem. Předpokládejme, že bude existovat řešení pomocí smazání 3 čísel.

Čísla v písku si rozdělíme do trojic $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ a $\{7, 8, 9\}$. Můžeme si všimnout, že všechny tyto trojice jsou ošklivé. To znamená, že z každé trojice musí

být smazáno alespoň jedno číslo a jelikož jsou trojice 3, tak z každé to bude právě 1.

Podobnou úvahu použijeme na trojice $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ a $\{3, 6, 9\}$ (první, druhé a třetí číslo z předchozích trojic dohromady). Z tohoto můžeme zase vyvodit, že jedno smazané číslo bude první v původních trojicích, jedno druhé a jedno třetí.

Podívejme se na trojici, kde bychom smazali prostřední číslo. Zbyla by nám čísla z první a třetí pozice. Ta mají rozdíl 2 a mohla by vytvořit ošklivou trojici s číslem v sousední trojici. Toto třetí číslo by ale bylo také uprostřed sousední trojice a porušilo by tvrzení, které jsme dokázali výše. Tudíž původní tvrzení neplatí a nelze smazat 3 čísla, aby se odstranily všechny ošklivé trojice.

Úloha č. 7

Anthony a Edmund hrají hru na nekonečném množství nekonečných řádků. Pánové se střídají v tazích, Anthony začíná. Anthony vždy nakreslí človíčka do nějakého prázdného políčka, Edmund nakreslí ovečky do nějakých dvou prázdných políček. Vybraná políčka spolu nemusí sousedit. Cílem hry je nakreslit 10 svých symbolů hned vedle sebe do jednoho řádku. Kdo má vyhrávající strategii? Dobře ji popište.

Řešení: Vzhledem k tomu, že sloupce nehrají ve hře žádnou roli, jednotlivé řádky se nemohou ovlivňovat. Anthony umístí človíčka do řádku. V následujícím kroku Edmund umístí dvě ovečky do dvou různých prázdných řádků.

Anthony se nyní může rozhodnout, zda bude bránit Edmundovi v postavení řady 10 oveček, nebo se pokusí sám vyhrát.

Pokud se rozhodne blokovat, vždy umí ovlivnit jen 1 ze 2 řádků, kam v minulém tahu zahrál Edmund. Pokud to udělá, v každém tahu Edmundovi vznikne jeden nový řádek, který Anthony neovlivnil. V prvních 256 tazích tak do 512 různých řádků umístí ovečku, přičemž 256 z nich zůstane neblokovaných. Když tuto řadu dokončí, začne postupně do neblokovaných řádků přidávat druhé ovečky. To zvládne za 128 tahů, protože jen polovina z nich bude moct být blokována Anthonym. Pokud chce obecně zvýšit počet oveček v řádku, vždy mu bude polovina zbývajících zablokována. Tímto způsobem umí Edmund vždy v 2^{10-n} řádcích mít n oveček za sebou. V určité chvíli se tedy dostane do situace, kdy bude mít 2 řádky po osmi ovečkách, jen jeden mu může být zablokovaný a v následujícím tahu vyhraje.

Pokud se Anthony v libovolný moment pokusí vytvořit řadu 10 človíčků, Edmund počká do chvíle, kdy jich má v řadě 9 a poté ji z obou stran zablokuje. Tím sice ztratí jeden tah, během výstavby takové řady ale stihne dostatečně zvýšit

počet neovlivněných řádků (konkrétně o 18). Poté Edmund pokračuje strategií popsanou výše. Edmund tedy vždy umí v konečném počtu tahů vyhrát.

Komentář: Většina řešitelů správně určila, že vyhraje Edmund. Ne všem se už ale povedlo správně popsat jeho výherní strategii. Ta by navíc měla fungovat univerzálně, tedy bez ohledu na to, jak hraje Anthony. Kromě objevení nějakého principu, jakým Edmund vyhraje, bylo potřeba explicitně vyřešit i případ, kde se Anthony snaží propojit svých 10 čtverečků. Chválím proto všechny, kterým se to povedlo.

Úlohy první série opravovali a komentáře sepsali: 1. Vít Houfek, 2. Matyáš Hazdra a Klára Pernicová, 3. Tomáš Flídr a Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 4. Adam Dřínek, 5. Dan Školař a Tereza Kubínová, 6. Vít Kaděra, 7. Lukáš Koucký