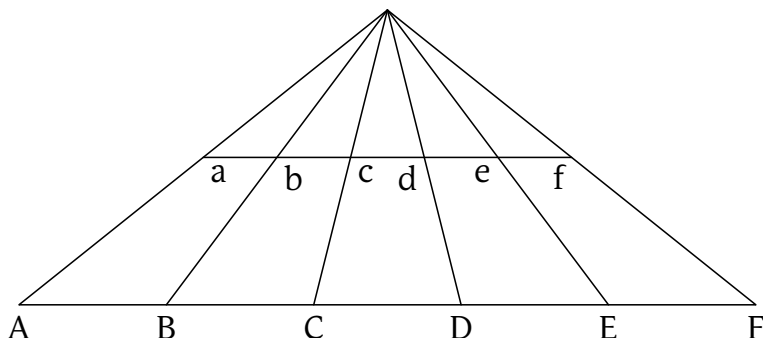


Vzorová řešení a komentáře Pikomatu Junior k 3. sérii příkladů

Příklad č. 1

Kolik trojúhelníků je na obrázku?



Řešení: Tato úloha se dá vyřešit dvěma způsoby. Můžeme najít všechny trojúhelníky na obrázku nakreslením si všech možností. V případě, že takto budeme postupovat, musíme kontrolovat, že jsme doopravdy našli všechny.

Co se týče druhého způsobu, musíme si uvědomit, že všechny trojúhelníky mají společný horní vrchol a jednou ze stran musí být vždy jedna z vodorovných úseček. Na nich je 6 bodů, které jsme si na obrázku označili A až F. Pokud chceme vytvořit trojúhelník s bodem A, tak třetím bodem může být B, C, D, E, F. Pokud poté budeme vytvářet všechny trojúhelníky s bodem B, tak už ho nemůžeme znovu propojit s A (tuto možnost jsme již započítali) a zbyde nám tudíž pouze C, D, E, F. Takto pokračujeme dále, dokud neprojdeme všechny body a nenajdeme tam trojúhelníky, které jsme ještě předtím nevytvořili. Nakonec se dostaneme

k celkovým $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ možnostem pouze na dolní úsečce. Stejný počet by byl i na horní úsečce, kde jsou body a až f. Z tohoto důvodu dostaneme $15 \cdot 2 = 30$ trojúhelníků.

Komentář pro řešitele: Většině řešitelů se podařilo trojúhelníky správně počítat, ať už to bylo nakreslením všech možností a nebo jinými způsoby. Někdy k výsledku chyběl postup či nějaké trojúhelníky zůstaly nespočítány, ale jsme na vás celkově moc pyšní.

Komentář pro rodiče/učitele: Děkujeme rodičům za mnoho vytisknutých trojúhelníků, které řešitelům výrazně pomohly.

Příklad č. 2

Celá různá kladná čísla a, b, c, d splňují $\frac{a+b+c+d}{4} = 10$, neboli jejich průměr je roven 10. Jaké největší číslo mezi nimi může být?

Řešení: Nejdřív je jistě třeba zbavit se té zlomkové čáry, na kterou hlavně mladší junioři ještě nebyvají zvyklí. Možná je docela srozumitelná úvaha, že když čtvrtina součtu je 10, pak součet je 40. Zkušenější možnost pak je vynásobit obě strany rovnice čtyřkou.

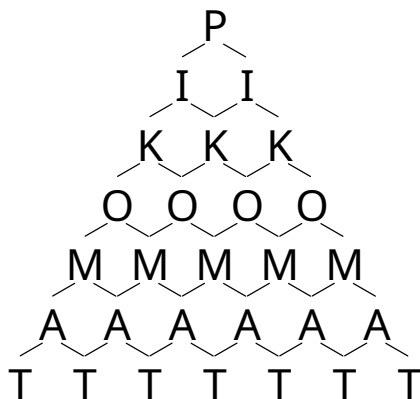
Když se takto dostaneme ke tvaru $a + b + c + d = 40$, je třeba usoudit, že aby jedno z čísel bylo co největší, musí být ostatní tři zase naopak co nejmenší. Hledáme tedy tři různá (každé jiné) nejmenší možná celá kladná čísla. Pokud víme, že nula se nepovažuje za kladné číslo (ono nic lze těžko považovat za kladné), pak snadno tato čísla určíme. Je to číslo 1, číslo 2 a číslo 3. Pokud součet těchto třech čísel, který je 6, odečteme od součtu všech čtyř čísel, vyjde nám největší možné číslo v tom součtu a to je číslo 34.

Komentář pro rodiče/učitele: Prakticky všechny děti zadání pochopily, minimum dětí přehlédlo, že čísla mají být různá a nesmí být nula a za tohle přišly o nějaké body. Daleko rozšířenější ne-

duh byla absence slovního zdůvodnění, vysvětlení postupu. Kde byl při správném výsledku aspoň náznak nějakého komentáře (hlavně u menších dětí), tak jsem to vytknul, ale body tentokrát ještě nekrátil, jinak jsem ubral bod. Příklad je to lehký, hodil se k rozvoji schopnosti vyjadřovat se k řešení a obecně zápisu postupu.

Příklad č. 3

Terka má nakreslené slovo Pikomat do tvaru pyramidy jako na obrázku níže. Z nakreslených písmenek chce vybrat jedno "P", jedno "I", "K", "O", "M", "A" a jedno "T" tak, aby tato písmenka mohla projít shora dolů po vyznačených čarách. Kolika způsoby to může udělat?



Řešení: Můžeme si všimnout, že z každého písmenka jdou dvě čáry dolů k dalšímu písmenku (kromě "T"). To znamená, že u každého písmenka jsou dvě cesty níž. Když tedy začneme u "P", tak jsou 2 možnosti, jak jít dolů. U každého "I" jsou zase dvě další možnosti, tudíž dohromady $2 \cdot 2$. S každým dalším řádkem se počet možností zdvojnásobuje, jelikož u jednoho písmenka jsou vždy dvě různé cesty dolů. Proto celkový počet způsobů je $2 \cdot 2 \cdot$

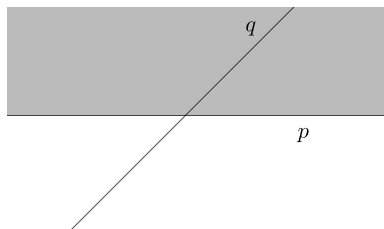
$$\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

Komentář pro řešitele: Častým nešvarem bylo vynechávání postupu, ať už pouhý výsledek bez vysvětlení nebo jen zápis čísel k řádkům. Postup je důležitou součástí řešení, takže jsme nějaké bodíky strhávali. Jinak ale spousta řešitelů měla správné řešení, za což moc chválíme.

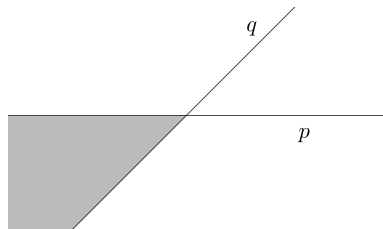
Komentář pro rodiče/učitele: Poskytnutí 64 různých pastelek k řešení úlohy bylo hezké a věřím, že i pro některé děti nápomocné.

Příklad č. 4

Jedním z nejdůležitějších pojmů v geometrii je úhel. Nejprve si vysvětlíme, co tento pojem znamená. Můžeme například říct, že se jedná o část roviny ohraničenou dvěma protínajícími se přímkami. Velikost úhlu je pak určena tím, jakou část roviny náš úhel zabírá. Pokud úhel tvoří celou rovinu, řekneme, že jeho velikost je 360° (čte se 360 stupňů). Pokud tvoří jen půlku roviny, bude jeho velikost poloviční, tedy 180° . Takovému úhlu často říkáme přímý.

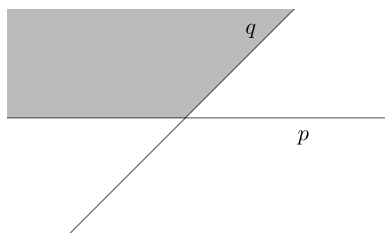


Přímý úhel

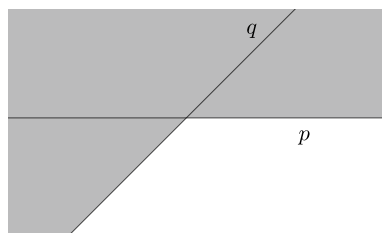


První úhel

Na obrázku výše úhel zabírá přesně jednu osminu roviny, jeho velikost tak bude 45° . Nabízí se ale otázka: Jak z pozice dvou přímek určíme, jaký úhel svírají? Vždyť jich přece je hned několik! Na dalším obrázku vidíme dva další úhly, které jsou také ohraničeny přímkami p a q. Jejich velikost je ale jiná.



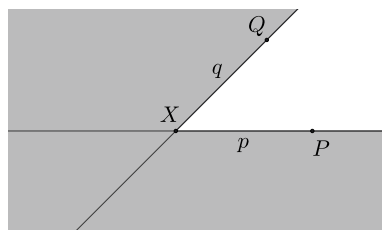
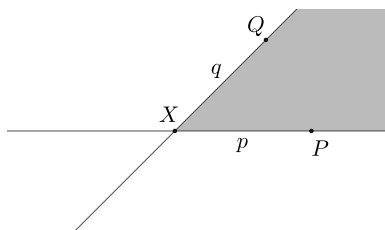
Druhý úhel



Třetí úhel

Ke spočtení velikosti druhého úhlu si můžeme uvědomit, že známe velikost přímého, ta je 180° . Když odečteme velikost původního úhlu (už víme, že je to 45°), dostaneme velikost nového úhlu, která tím pádem bude 135° . Nyní si zkusíme spočítat velikost třetího úhlu. I tentokrát můžeme využít velikost přímého úhlu. Pak přičteme velikost úhlu na pravém obrázku níže, ten je stejně velký jako náš původní úhel. Vyjde nám proto 225° .

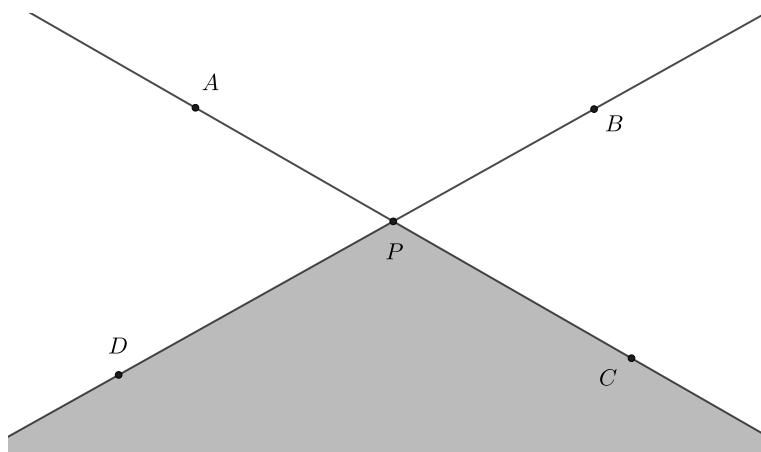
Úhlů mezi dvěma přímkami je tedy víc, a proto obvykle chceme vyjádřit, který zrovna máme na mysli. Na přímkách naštěstí často leží nějaké body, s jejichž pomocí můžeme vyjádřit to, co chceme. Tak například řekněme, že se přímky p a q protínají v bodě X , na přímce p leží bod P a na přímce q leží bod Q jako na následujících obrázcích.



Náš původní úhel tak můžeme zapsat pomocí trojpísmenného kódu. Na druhém místě vždy bude bod, v němž se přímky protínají (tomuto bodu říkáme vrchol úhlu), v našem případě je to bod X . Na prvním a na třetím místě pak budou body, které úhel ohrani-

čují. To jsou tedy body $.Q.$ a $.P..$ Nezáleží na tom, které písmenko napíšu na první a které na třetí místo, náš úhel tedy lze zapsat dvěma způsoby: úhel $.PXQ.$ nebo úhel $.QXP..$ Tento zápis úhlu si procvičíme ještě na jednom příkladu. Nutno dodat, že ani z tohoto zápisu úhlu není jasné, jestli se skutečně jedná o náš původní úhel, nebo o ten napravo. Tomu menšímu říkáme konvexní a tomu většímu nekonvexní. Při použití tohoto zápisu ale většinou máme na mysli ten konvexní.

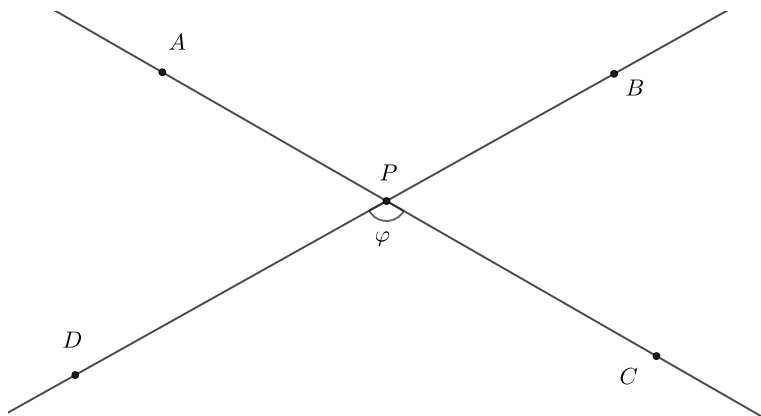
Podpříklad: Zapiš vyznačený úhel.



Všimneme si, že se přímky protínají v bodě $.P.$ Úhel je ohraničen polopřímkami $.P.D.$ a $.P.C..$ Na druhém místě kódu bude označení průsečíku, na prvním a třetím místě budou body na hraničních polopřímkách různé od jejich průsečíku. Úhel tedy můžeme zapsat jako $.C.P.D.$ anebo $.D.P.C.$ (uved' obě možnosti).

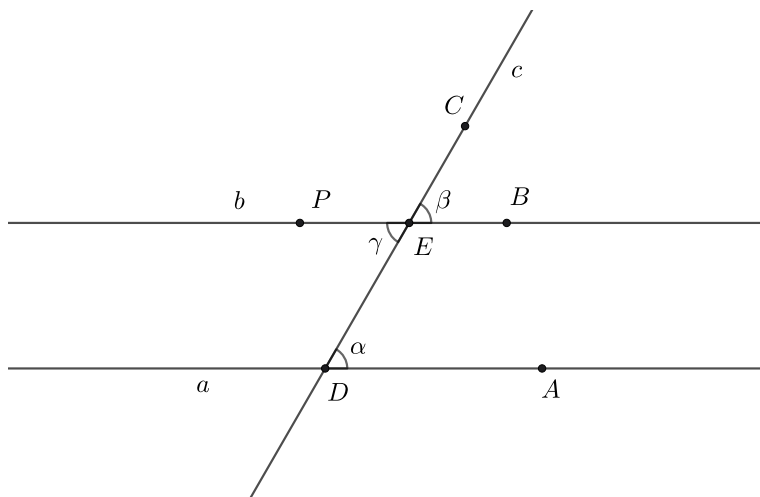
Nyní se podíváme na to, jak úhly můžeme značit přímo v obrázku. Většinou volíme takový oblouček u vrcholu, což znázorňuje další obrázek. K němu můžeme přidat buď přímo jeho velikost, nebo nějaké malé písmeno z řecké abecedy. Například α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta) nebo φ (fí). Tato řecká písmenka ale

vždy označují jen velikost daného úhlu.

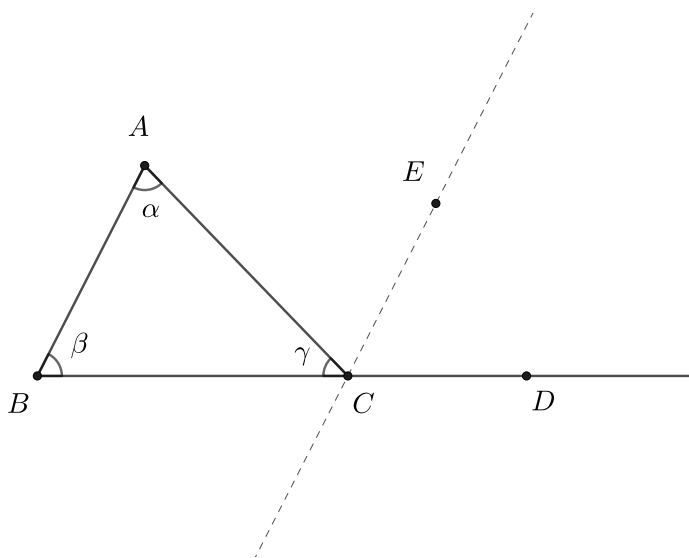


Teď si ukážeme nějaká důležitá tvrzení, která pro úhly platí. Zajímavé věci se budou dít, pokud se v obrázku vyskytnou nějaké rovnoběžné přímky. Připomeňme si, co to rovnoběžné přímky jsou.

Definice. O dvojici přímek řekneme, že jsou rovnoběžné, pokud mají stejný směr (jsou stejně natočené), a tím pádem se nikdy neprotínají.



Představme si nyní, že máme dvě rovnoběžné přímky a, b a obě protíná třetí přímka c (jako na obrázku). Dále se na přímkách a, b, c nacházejí body A, B, C , přímky a, c se protínají v bodě D a přímky b, c se protínají v bodě E . Na přímce b navíc ještě leží bod P . Velikost úhlu ADC označme α a velikost úhlu BEC označme β . Pokud se na úhly α, β podíváme z pohledu, že velikost úhlu odpovídá tomu, jak moc se liší směry přímek a, c , resp. b, c , s přihlédnutím k tomu, že přímky a, b mají stejný směr, můžeme si všimnout, že $\alpha \equiv \beta$. Pokud zároveň označíme velikost úhlu PED písmenem γ , můžeme si uvědomit, že $\beta \equiv \gamma$. Celkově proto platí, že $\alpha \equiv \gamma$. Dvojici úhlů ADC a BEC někdy nazýváme úhly souhlasné, dvojici úhlů BEC a PED se říká úhly vrcholové a dvojici úhlů ADE a PED můžeme nazvat úhly střídavé.



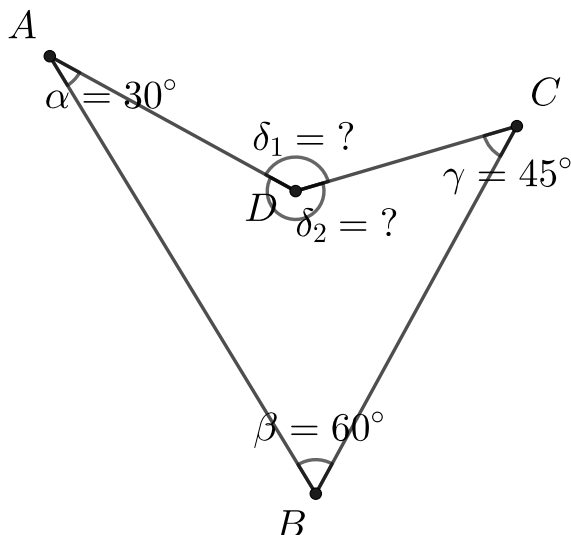
Na závěr si ukážeme dvě těžší tvrzení. Máme jakýkoliv trojúhelník, jeho vrcholy označíme A, B, C . Velikost úhlu BAC označme α a velikost úhlu CBA označme β . Napravo od bodu C leží na

přímce BC bod D. Nás by zajímalo, jestli je možné nějak hezky vyjádřit velikost úhlu DCA pomocí α a β . K tomu nám pomůže trik. Do obrázku nakreslíme přímku rovnoběžnou s přímkou AB, která prochází bodem C (na ní leží bod E). Ted si můžeme všimnout, že v obrázku vznikly zajímavé úhly. K úhlu CBA můžeme najít jeden souhlasný úhel, a to úhel DCE. K úhlu BAC naopak můžeme najít jeden střídavý úhel, ten zapíšeme jako ACE. Ted už vidíme, že velikost úhlu DCA lze zapsat jako součet velikostí těchto dvou úhlů. Proto můžeme říct, že velikost úhlu DCA je $\alpha + \beta$. To ovšem není všechno. Pokud označíme velikost úhlu ACB jako γ , můžeme si všimnout, že velikost úhlu DCB lze vyjádřit jako součet velikostí tří úhlů, z nichž všechny mají vrchol v bodě C. Prvním je úhel ACB, jehož velikost je γ , druhým je ACE, jehož velikost je α , a třetím je úhel DCE, jehož velikost je β . Když si ale uvědomíme, že velikost úhlu DCB je 180° , můžeme dospět k závěru, že $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ pro libovolný trojúhelník ABC, kde α, β, γ jsou jeho tři vnitřní úhly. Vnitřní se jim říká proto, že celý trojúhelník ABC je uvnitř každého z těchto úhlů.

Ukázali jsme si, že dokreslování rovnoběžek do obrázku je užitečný trik, který se vyplatí znát. Ještě jednou si ho můžete vyzkoušet v páté úloze. Napovíme, že bude třeba dokreslit dokonce dvě přímky, každá však může být rovnoběžná s nějakou jinou přímkou.

Příklad č. 5

Na obrázku je čtyřúhelník ABCD. Víme, že velikost úhlu BAD je $\alpha = 30^\circ$, velikost úhlu CBA je $\beta = 60^\circ$ a velikost úhlu DCB je $\gamma = 45^\circ$. Urči velikost obou úhlů CDA (tedy konvexního, δ_1 , i nekonvexního, δ_2). Svoji odpověď zdůvodni výpočtem, ne změřením z obrázku.



Řešení: Tato úloha má více správných postupů. Nejjednodušší a nejčastější je následující. Když spojíme body A a C úsečkou a víme, že trojúhelník má dohromady součet stupňů 180, u nově vytvořeného trojúhelníku bude tedy součet úhlů u vrcholů A a C celkem $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Když odečteme α, β , tedy $120^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, pak víme, že v trojúhelníku ACD máme u vrcholů A a C dohromady 45 stupňů. Dopočítáme úhel δ_1 v trojúhelníku ACD: $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Úhel δ_2 , se kterým úhel δ_1 dohromady tvoří 360° , pak vyjde $360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$.

Úlohy třetí série opravovali a komentáře sepsali: 1. Luisa Troupová, 2. Ludvík Steinhauser, 3. Robin Tesař a Eliška Vimmerová, 4. Noel Probst, 5. Alžběta Reitmayerová