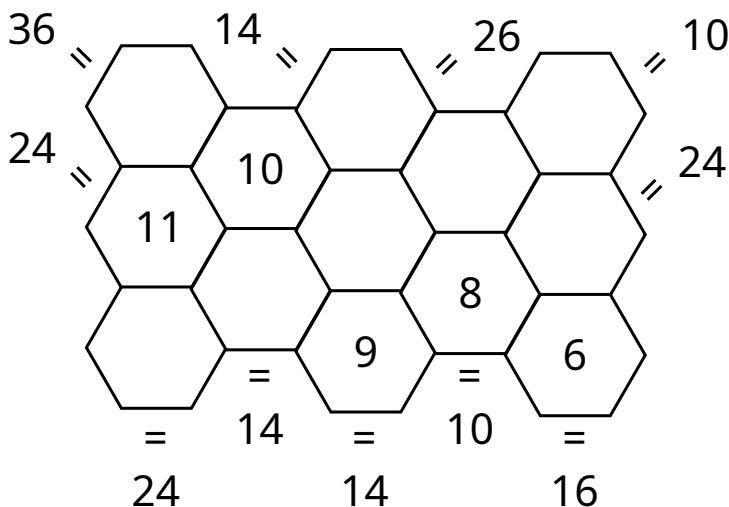


Vzorová řešení a komentáře Pikomatu Junior k 2. sérii příkladů

Příklad č. 1

Pikomaťáci našli plástev dosud nepoznaného druhu včel. Tyto včely měly plástev rozdělenou na 13 šestiúhelníků, přičemž v každém z nich měly uložený neznámý počet kuliček medu. Víme, že počet těchto kuliček se pohyboval v rozsahu od 0 do 12, že byl pro každou dvojici šestiúhelníků různý, a že součty v každém směru jsou určeny čísly na okraji plástve. Dokresli do plástve počet kuliček medu, který se v každém šestiúhelníku vyskytoval.



Plástev s kuličkami medu

Řešení: Úlohu jsme nejsnáze vyřešili doplňováním čísel tam, kde v rovnici chybělo vždy jen jedno.

Tedy jeden z postupů byl

$8 + ? = 10$ tedy doplním 2, potom

$10 + 11 + ? = 26$ tedy doplním 5

A tímto vyplníme celou tabulku

$5 + ? + 9 = 14$ tedy doplním 0

$10 + ? = 14$ tedy doplním 4

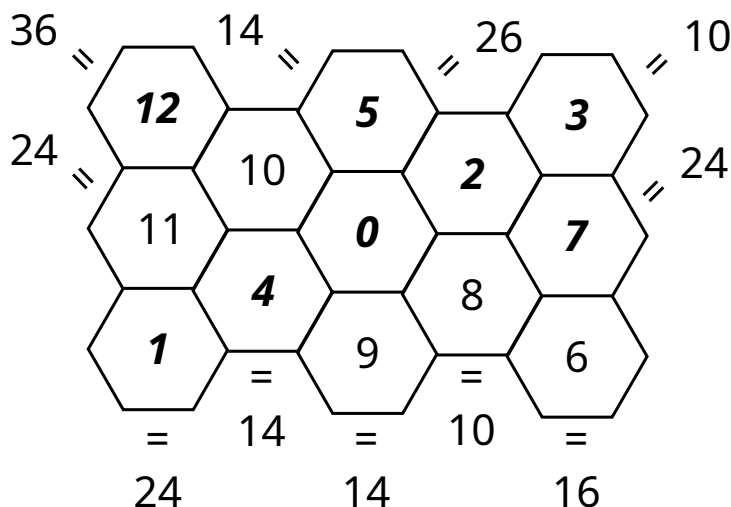
$9 + 8 + ? = 24$ tedy doplním 7

$? + 7 + 6 = 16$ tedy doplním 3

$? + 10 + 0 + 8 + 6 = 36$ tedy doplním 12

$12 + 11 + ? = 24$ tedy doplním 1

Tím to jsme vyplnili tabulku a zjistili jsme, že má pouze jedno řešení a to toto:



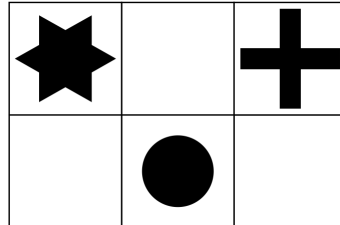
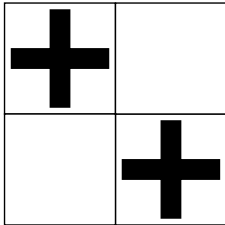
Příklad č. 2

Pikomaťáci si tak dlouho překreslovali včelí plástve, až se to včelám přestalo líbit, a zuřivě je pobodaly. V následných halucinacích začali Pikomaťáci spatřovat prázvláštní útvary. Tyto útvary byly plné hvězdiček, koleček a křížků. Některá pole však byla prázdná a Pikomaťáci do nich začali tyto symboly dokreslovat. Přitom se řídili dvěma pravidly:

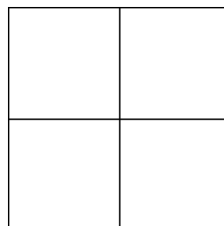
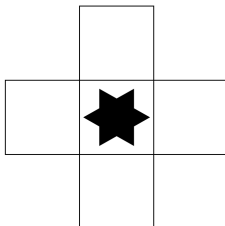
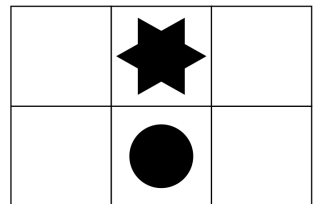
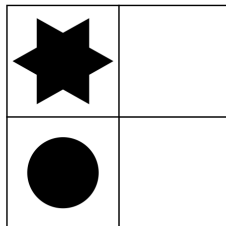
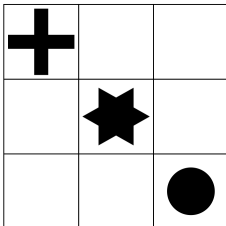
1. Do každého pole přijde právě jeden symbol (hvězdička, kolečko, nebo křížek).

2. Dvě pole sousedící hranou musí obsahovat různý symbol.

Tedy například u levého z následujících útvarů měli 4 možnosti, jak ho doplnit, zatímco u útvaru vpravo neměli možnost žádnou.



Urči u každého z následujících obrázků, kolika způsoby ho mohli Pikomataři dovýplnit:



U této úlohy stačí uvést výsledky. Postup budeme hodnotit v případě nesprávných výsledků.

Řešení:

U prvního obrazce je jen jeden způsob. Hned ze začátku se dají doplnit obrazce do čtverců sousedící s hvězdou. Jsou jen tři symboly a musí se doplnit třetí, aby platila všechna pravidla. Rohová políčka sousedí s různými obrazci a musí se tedy doplnit ten poslední.

Ve druhém obrazci vedle hvězdičky jdou doplnit dva obrazce, buď kolečko, nebo křížek. Pokud se doplní křížek, vedle kolečka musí být hvězda. A pokud se doplní kolečko, vedle kolečka může být hvězdička nebo křížek. Dohromady tedy tři způsoby, jak doplnit obrazec.

U třetího obrazce to bude podobné jako u předchozího. Na pravé straně jsou tři možnosti a na levé také tři možnosti. Tato dvě čísla vynásobíme, jelikož pro každou možnost na levé straně můžou být tři možnosti na té pravé a naopak. Dohromady tedy 9 způsoby.

Ve čtvrtém obrazci na každé straně od hvězdičky můžeme doplnit dva symboly, to nám dává dvě možnosti pro každou stranu. Musíme započítat každou kombinaci právě jednou, tedy výsledný počet způsobů bude $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Při počítání v pátém obrazci se můžeme vrátit k druhému obrazci. U toho jsme měli 3 způsoby, jak ho doplnit. Kdybychom změnili kolečko za křížek, dostaneme zase 3 způsoby. Celkem bychom tedy měli 6 možností pro hvězdu v levém horním rohu. Hvězdičku ale můžeme také vyměnit za další dva obrazce, které můžeme doplnit stejným počtem způsobů jako u hvězdičky. Dohromady tedy: $6 + 6 + 6 = 3 \cdot 6 = 18$ způsobů.

Příklad č. 3

Když jejich halucinace skončily, rozložili si do řady 14 karet. Některé karty dali rubem nahoru, některé lícem nahoru. Pak několi-

krát za sebou vzali nějakou dvojici sousedních karet a obě je otočili. Kolika nejméně tahy mohli otočit karty tak, aby byly všechny rubem nahoru? Původní rozložení karet bylo následující (R jako rub, L jako líc):

RLLLRRLRLRLLRL

Řešení: Minimální počet otočení dvou sousedních karet tak, aby všechny karty byly rubem nahoru, je osm.

Jako vždy v tomto typu úloh, důkaz má dvě části. Nejprve ukážeme, že osmi tahy můžeme otočit všechny karty rubem nahoru, a poté dokážeme, že na menší počet tahů to nelze.

Pro první část stačí popsat jeden konkrétní postup: v každém kroku otočíme kartu lícem nahoru nejvíce nalevo a kartu napravo od ní. Rozložení karet po jednotlivých krocích jsou v tabulce.

Krok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	R	L	L	L	R	R	L	R	L	R	L	L	R	L
1	R	R	R	L	R	R	L	R	L	R	L	L	R	L
2	R	R	R	R	L	R	L	R	L	R	L	L	R	L
3	R	R	R	R	R	L	L	R	L	R	L	L	R	L
4	R	R	R	R	R	R	R	R	L	R	L	L	R	L
5	R	R	R	R	R	R	R	R	R	L	L	L	R	L
6	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	L	R	L
7	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	L	L
8	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

Druhá část, tedy důkaz, že vždy potřebujeme alespoň 8 kroků, je náročnější. Nejprve si všimněme, že nezáleží na pořadí otočení dvojic: karta po posloupnosti kroků změní otočení, právě když byla otočena v lichém počtu kroků. Například karta na 5. pozici bude L, právě když v lichém počtu kroků otočíme dvojici 4–5 nebo 5–6. Otočení stejné dvojice dvakrát nezmění otočení karet. Díky tomu můžeme předpokládat, že každou dvojici otočíme maximálně jednou – otáčení stejné dvojice dvakrát pouze prodlužuje posloupnost.

- Kdybychom otočili dvojici 1–2, karta na 1. pozici by byla L bez ohledu na ostatní dvojice. Tuto dvojici tedy nemůžeme otočit. (Pokud ji otočíme, musíme ji někdy v průběhu otočit zpět.)
- Musíme otočit kartu na 2. pozici na L a 1–2 neotáčíme, takže 2–3 otočit musíme.
- Kartu na 3. pozici jsme otočili na R při otáčení 2–3, takže ji nemůžeme otočit dvojicí 3–4. Tuto dvojici tedy neotočíme.
- Musíme otočit kartu na 4. pozici a 3–4 neotáčíme, takže 4–5 otočit musíme.
- Kartu na 5. pozici tímto otočíme na L, takže musíme otočit i 5–6.
- Kartu na 6. pozici tímto otočíme na L, takže musíme otočit i 6–7.
- Kartu na 7. pozici tímto otočíme na R, takže nemůžeme otočit 7–8.
- Karta na 8. pozici tímto zůstává na R, takže nemůžeme otočit 8–9.
- Karta na 9. pozici tímto zůstává na L, takže musíme otočit 9–10.
- Kartu na 10. pozici tímto otočíme na L, takže musíme otočit i 10–11.
- Kartu na 11. pozici tímto otočíme na R, takže nemůžeme oto-

čit 11–12.

- Karta na 12. pozici tímto zůstává na L, takže musíme otočit 12–13.
- Kartu na 13. pozici tímto otočíme na L, takže musíme otočit i 13–14.

Alespoň jednou tedy musíme otočit každou z dvojic 2–3, 4–5, 5–6, 6–7, 9–10, 10–11, 12–13, 13–14, takže musíme otočit alespoň 8 dvojic. Dokonce jsme dokázali, že v každém postupu otočíme právě tyto dvojice, plus případně nějaké dvojice tam a zpět.

Komentář pro řešitele: Většina řešitelů si s úlohou bez obtíží poradila, za což jim náleží velká pochvala. Největší problémy nastávaly u nejednoznačně popsaného postupu, v jakém je potřeba karty otáčet. V těchto případech jsme obvykle strhávali jeden až dva body (zejména pokud postup úplně chyběl).

Komentář pro rodiče/učitele: Děkujeme všem rodičům, kteří svým dětem poskytli například karty k vyzkoušení postupu při řešení úlohy. Jen bychom Vás chtěli požádat, aby byl při podobné dokumentaci postupu příště zaznamenán každý jednotlivý krok, nikoli pouze výsledný stav.

Jinak však vše proběhlo v pořádku a ještě jednou děkujeme za Vaši podporu!

Příklad č. 4

Pikomaťáci vzali krychli $3 \times 3 \times 3$ a zkusili ji rozřezat na 27 krychlíček o straně délky 1. V každém tahu mohli jedním rovným řezem rozdělit na dvě části každou ze souvislých částí, kterou zrovna měli. Kolika nejméně a kolika nejvíce tahy mohli Pikomaťáci tuto krychli rozřezat?

Řešení: Nejprve zjistíme, na kolik nejvíce tahů se krychle dá rozřezat. Do každého tahu dáme k rozříznutí jen jednu souvislou

část. Začínáme s jednou částí a po prvním tahu budeme mít dvě části. Ve druhém tahu jednu z nich rozřízneme a budeme mít celkem tři části. Každým tahem se celkový počet částí o jedna zvětší. Protože jsme začínali s jednou částí a na konci chceme 27 částí (27 krychliček), využijeme 26 tahů.

Teď zjistíme, na kolik nejméně tahů se krychle dá rozřezat. Prostřední krychlička má 6 krychliček, které s ní sousedí stěnou v původní krychli. Takže budeme určitě potřebovat alespoň 6 tahů. Následně si ukážeme, že nám to bude stačit. Po každém tahu necháme části jakoby u sebe, aby se nám lépe řezalo více částí najednou. Každý tah vedeme podél jedné ze stěn prostřední krychličky. Můžeme si povšimnout, že po těchto šesti tazích je každá krychlička odseknutá od ostatních podél všech svých stran. Určitě jsme tím dostali zcela rozřezanou krychli

Komentář pro řešitele: Ze zadání nebylo tolik jasné, že můžeme jedním tahem řezat více částí zároveň. Proto jsme uznávali, i když řešení mělo jen možnost s 26 tahy.

Příklad č. 5

Nakonec, když se ze svých příhod vrátili domů, přihlásila se Terka (nejmladší z nich), že by si chtěla zajít pro kytičky. Aby jí ale neuschly, musela si cestou pro ně nabrat vodu v potůčku. Zakresli do obrázku, kde měla vodu nabrat, jestliže chtěla ujít co nejkratší vzdálenost.

Kytička



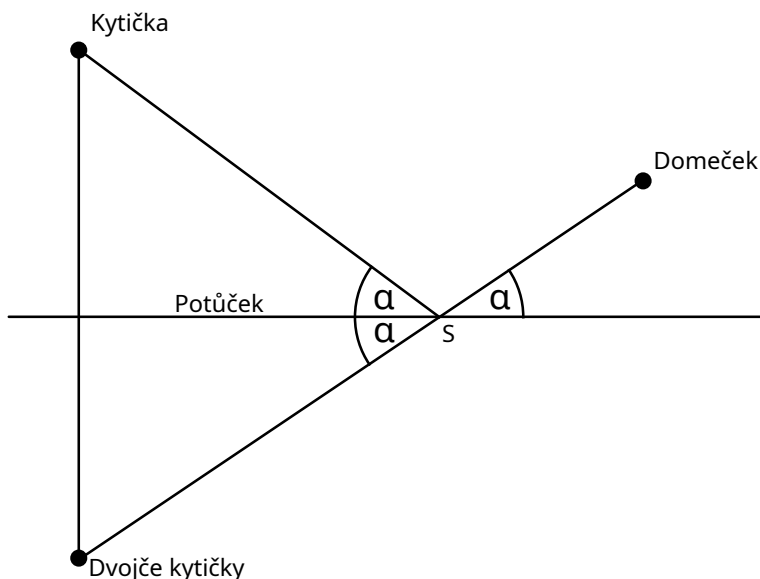
Domeček



Potůček

Řešení: U této úlohy si pomůžeme malým trikem. Na druhé straně potůčku si nakreslíme dvojče kytičky, které bude od potůčku stejně daleko jako původní kytička – viz obrázek níže. Domeček s dvojčetem spojíme úsečkou, a kde se tato úsečka protne s potůčkem, vyznačíme bod S. Určitě souhlasíte s tím, že nejkratší cesta od domečku k dvojčeti kytičky je právě přes bod S. Zajímavé je, že tato cesta k dvojčeti je stejně dlouhá jako cesta od domečku k původní kytičce přes bod S, protože část cesty od domečku k potůčku je shodná a část cesty od potůčku k původní kytičce je jen symetrický obraz cesty k dvojčeti. Tyto dvě cesty budou stejně dlouhé, ať by bod S byl kdekoliv jinde na potůčku – rozdíl bude jen v tom, že cesta ke dvojčeti kytičky už nebude úsečka, ale lomená čára, a tak by cesta byla o něco delší. A delší tím pádem bude cesta i k původní kytičce. A tím jsme dokázali,

že nejkratší cesta od domečku ke kytičce je právě přes původní bod S – posuneme-li tento bod o trochu doprava, nebo doleva, prodloužíme cestu ke dvojčeti, a tím i k původní kytičce.



Úlohy druhé série opravovali a komentáře sepsali: 1. Ludvík Steinhauser, 2. Noel Probst, 3. Jana Malkovská, Tereza Kubínová a Tomáš Flídr, 4. Eliška Vimmerová a Robin Tesař, 5. František Steinhauser