

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

zasíláme vám výsledky a vzorová řešení páté a šesté série. Děkujeme všem řešitelům, co se propočítali až do této série.

Podzimní soustředění

Kromě matematických úloh pro vás chystáme i spoustu dalších neméně zajímavých akcí. Na nejúspěšnější účastníky 5. a 6. čeká podzimní soustředění od 15. do 20. září. Můžete se těšit na hry, přednášky i semináře.

Tábor

26.7. až 9.8. proběhl Pikomatí tábor tentokrát v podhůří Krkonoš. Doufáme, že jste si tábor užili tak moc jako my, a těšíme se na další rok.

MaSo

Organizátoři vás také rádi potkají na soutěži MaSo, která se bude konat ve středu 12. listopadu. V této týmové soutěži vás čekají matematické příklady a doprovodná strategická hra, jak jste zvyklí z matbojů na pikomatích akcích.

Více informací najdete na naší webové stránce, případně také na našem Instagramu. Pokud budete mít nějaký dotaz nebo připomínku, napište nám na náš e-mail pikomat@pikomat.mff.cuni.cz.

Těšíme se na další ročník! Na viděnou,

Vaši organizátoři

Vzorová řešení a komentáře

k 5. sérii úloh

Úloha č. 1

Skupinka čtyř dinosaurů potřebuje v noci projít strastiplnou cestu. Je noc a mají jen jednu hořící větev, se kterou je potřeba si svítit pod nohy. Protože je stezka úzká, můžou chodit maximálně ve dvojicích. Tyrannosaurus rex by sám dokázal cestu projít za 2 minuty, megalosaurus za 3 minuty, velociraptor za 5 minut a troodon za 6 minut.

Když jdou dva dinosauri spolu, jejich rychlost je stejná jako rychlost toho pomalejšího. Hořící větev se nemůže teleportovat, je potřeba ji vždy přenést.

Poradte skupince dinosaurů, jak se mohou všichni čtyři dostat na druhý konec stezky za 17 minut.

Řešení: Nejdřív přejdou tyrannosaurus rex s megalosaurem (to trvá 3 minuty) a tyrannosaurus se vrátí (2 minuty). Poté přejdou velociraptor s troodonem (6 minut), s větví se vrátí megalosaurus (3 minuty). Nakonec po stezce znovu přejdou tyrannosaurus rex s megalosaurem (3 minuty). To je celkem 17 minut.

Můžeme také ukázat, že rychlejší řešení neexistuje. Aby se všichni dinosauri dostali na druhou stranu, musí $3 \times$ projít 2 dinosauri tam a $2 \times$ jeden dinosaurus zpátky. Kdyby nějakou cestu tam vykonal jen jeden dinosaurus, ničemu by to neprospělo, protože někdo by se musel vrátit s větví a počty dinosaurů na obou koncích by se nezměnily. Níže uvedené odhady by platily i v takovém případě.

Každá cesta tam trvá alespoň tři minuty (nejrychlejší dvojice je tyrannosaurus s megalosaurem) a alespoň jedna cesta tam trvá 6 minut (troodon také musí někdy přejít). Kdyby obě cesty zpět vykonal tyrannosaurus rex, tak by cesta trvala celkem 18 minut (tyrannosaurus by působil jako převozník, který vodí jednotlivé dinosaury tam a vrací se sám zpátky), ale my už víme, že optimálnější (17minutové) řešení existuje, a proto alespoň jednu cestu zpět musí vykonat někdo jiný – nejrychleji megalosaurus za tři minuty. Součtem všech odhadů získáme, že nejrychlejší řešení trvá alespoň 17 minut.

Komentář:

Většina řešitelů našla správné řešení. Několikrát se ale vyskytla úvaha, že tyrannosaurus rex má chodit s pochodní tam a zpátky a převést ostatní dinosaury. Takové řešení ale trvá 18 minut. Můžeme říct, že zde velociraptor figuruje jako zátěž (jde s tyrannosaurem) místo aby byl tahoun (kdyby šel s troodonem).

Úloha č. 2

Ceratosaurus má spoustu kamenných krychlí o hraně 1 cm. Slepil z nich útvar, vždy k sobě přikládal celé stěny. Povrch útvaru je 100 cm^2 . Popište jednu možnost, jak takový útvar mohl vypadat. K této možnosti napište počet krychlí, ze kterých se skládá, a nakreslete obrázek.

Řešení: U této úlohy bohužel neexistuje vzoreček nebo mechanický postup, který bychom mohli aplikovat, abychom hledaný útvar našli. Místo toho se pokusíme řešení odhadnout. Postupovat budeme od nejjednoduššího tělesa, které známe – a tím je krychle nebo kvádr. Ze zadání můžeme rovnou vidět, že velká krychle složená z malých krychliček hledaným řešením být nemůže – krychle má 6 stěn se stejným obsahem a 100 cm^2 určitě není celočíselně dělitelné 6. Místo toho se pokusíme krychličky sestavit do kvádru a zkusíme odhadnout, jakou délku budou mít jeho strany.

Mějme kvádr o délce stran a , b a c . Můžeme jednoduše odvodit, že vzoreček pro výpočet jeho povrchu bude následující:

$$2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$$

Víme, že povrch je roven 100 cm^2 . Můžeme tedy vytvořit rovnici o 3 neznámých, u které hledáme alespoň jedno celočíselné řešení (krychličky nechceme řezat). Opět budeme hádat a nastavíme hodnotu a a b na 1. U obecné rovnice by bylo nejjednodušší nastavit jejich hodnotu na 0, nicméně v našem případě víme, že každý námi složený kvádr bude mít šířku, výšku a délku minimálně 1. Získáme následující rovnici o jedné neznámé, kterou se pokusíme vyřešit:

$$2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 100,$$

$$2(1 \cdot 1 + 1 \cdot c + 1 \cdot c) = 100,$$

$$1 + 2c = 50,$$

$$c = 24.5.$$

Jak vidíme, pro c jsme nenašli celočíselné řešení. Nyní zkusíme nastavit neznámou a na 2, b na 1 a proces zopakujeme:

$$2(2 \cdot 1 + 2 \cdot c + 1 \cdot c) = 100,$$

$$2 + 3c = 50,$$

$$c = 16.$$

Podařilo se nám uhodnout, že jedno z možných řešení rovnice je $a = 2$, $b = 1$

a $c = 16$. Takový kvádr bude složen z $2 \cdot 1 \cdot 16 = 32$ malých krychliček. Na obrázku vidíme, jak takový kvádr bude vypadat.

Komentář: Úlohu lze samozřejmě řešit i jinými způsoby. Jedno hezké řešení, které se opakovalo u víc řešitelů, bylo, že sestavíme krychli $4 \times 4 \times 4$ a na ni postavíme ještě jednu krychličku, čímž zvětšíme její povrch z 96 cm^2 na 100 cm^2 .

Úloha č. 3

Carcharodontosaurus si do trávy vydupal přirozené číslo. Toto číslo mělo sudý počet cifer a pro každou cifru na sudé pozici (cifry číslujeme od pozice jednotek) platilo, že byla stejná jako předcházející cifra (např. 335 588 nebo 9 922). Dokonce se jednalo o druhou mocninu nějakého přirozeného čísla. Určete nejmenší přirozené číslo, jaké si carcharodontosaurus mohl do trávy vydupat. Zdůvodněte, proč je opravdu nejmenší.

Řešení:

Hledané číslo je druhou mocninou přirozeného čísla, tedy lze napsat jako n^2 pro nějaké přirozené číslo n . Hledané číslo musí být dělitelné jedenácti: $\overline{a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n} = 11 \cdot \overline{a_1 0 a_2 0 \dots a_n}$. ($\overline{abc}$ je zápis pro číslo s ciframi a, b, c v desítkové soustavě, používáme jej pro odlišení od násobení.)

11 je prvočíslo, takže 11 dělí i n . (Všechna prvočísla v prvočíselném rozkladu n^2 jsou i v prvočíselném rozkladu n .) Hledané číslo je tedy druhou mocninou násobku 11, procházejme tato čísla od nejmenších:

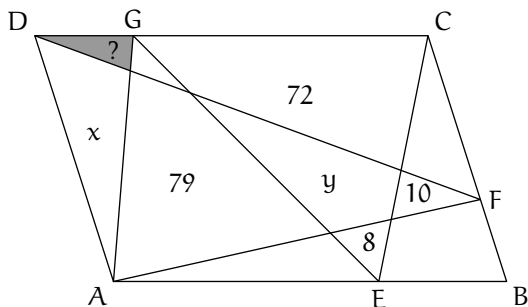
$11^2 = 121$ nevyhovuje, $22^2 = 484$ nevyhovuje, $33^2 = 1089$ nevyhovuje, $44^2 = 1936$ nevyhovuje, $55^2 = 3025$ nevyhovuje, $66^2 = 4356$ nevyhovuje, $77^2 = 5929$ nevyhovuje a konečně $88^2 = 7744$ vyhovuje.

Komentář: Mnoho řešitelů našlo správný výsledek. Všechna řešení obsahovala procházení možností – někdy i méně, například díky zamýšlení se nad možnými posledními číslicemi druhých mocnin přirozených čísel. Někteří řešitelé bohužel procházení možností nenapsali a přišli tím o body.

Úloha č. 4

Do skály byl vytesán rovnoběžník jako na obrázku. Uvnitř něj vedlo několik úseček (obrázek je pouze ilustrativní a nepřesný). Krokodýl spočítal obsahy některých částí, v obrázku jsou obsahy uvedeny v cm^2 . Určete obsah části s otazníkem. Napište postup, jak jste na to přišli.

Řešení:



Obr. 1

Trojúhelník AFD musí zabírat polovinu obsahu rovnoběžníku ABCD, jelikož obsah trojúhelníku AFD je roven $S = \frac{|AD| \cdot v_d}{2}$ a rovnoběžníku $S = |AD| \cdot v_d$, kde v_d je vždy výška na stranu AD k protější rovnoběžné straně.

Dále víme, že trojúhelníky DAG a CEG mají dohromady obsah roven polovině obsahu ABCD, protože $S_{DAG} + S_{CEG} = \frac{|DG| \cdot v_e}{2} + \frac{|GC| \cdot v_e}{2} = (|DG| + |GC|) \cdot \frac{v_e}{2} = \frac{|CD| \cdot v_e}{2}$ je součet obsahů těchto trojúhelníků, obsah rovnoběžníku lze spočítat jako $S = |CD| \cdot v_e$.

$$x + y + 79 + 10 = x + y + 72 + 8 + ?$$

$$9 = ?$$

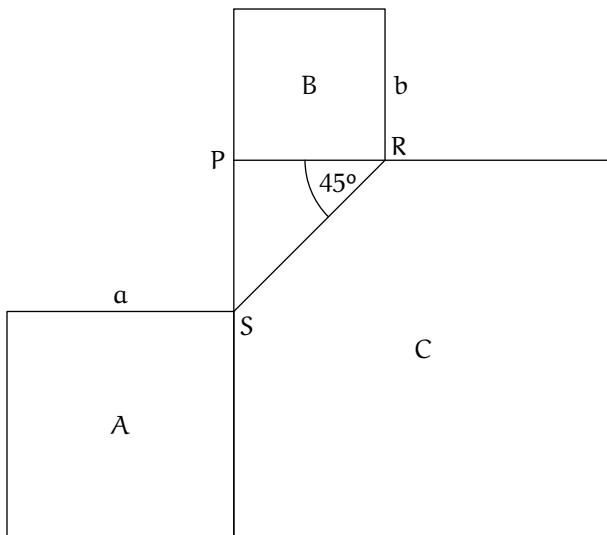
Obsah části s otazníkem je 9cm^2 .

Komentář: Naprostá většina řešitelů, která úlohu odevzdala, měla správné řešení.

Úloha č. 5

Ve skále byl vytesán obrazec 2. Jedná se o tři čtverce a úsečku pod úhlem 45° stupňů. Víme, že obsah čtverce C je 18cm^2 a že součet obsahů čtverců A a B je 10cm^2 . Určete, kolik je $a \cdot b$, kde a je délka strany čtverce A a b je délka strany čtverce B. Popište, jak jste k výsledku došli.

Řešení: Nejprve si označíme body, které jsou vrcholy trojúhelníku vzniklého pomocí úsečky s úhlem 45° P, R a S tak, jak je na obrázku 2. Platí, že úhel RPS je pravouhlý, protože je vnitřním úhlem čtverce, a tedy je úhel RSP velký 45° . Z toho plyne, že trojúhelník PRS je rovnoramenný, protože jsou úhly PRS a RSP stejně velké, a tedy platí $|PR| = |PS| = b$. Z toho vidíme, že se strana čtverce C



Obr. 2

se rovná $a + b$. Z těchto poznatků a z informací ze zadání si napíšeme soustavu následujících dvou rovnic:

$$a^2 + b^2 = 10$$

$$a + b = \sqrt{18}$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme vyjádřením b z druhé rovnice a dosazením do první rovnice:

$$b = 18 - a$$

$$a^2 + (18 - a)^2 = 10$$

Z této rovnice nám vyjde následující kvadratická rovnice:

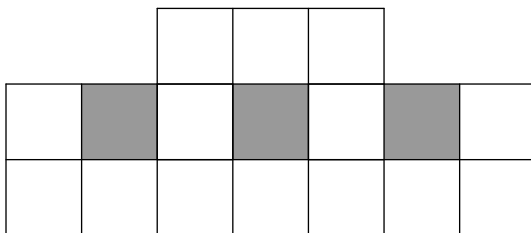
$$a^2 - \sqrt{18}a + 4 = 0$$

Tato rovnice má následující dvě řešení: $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{2}$. Vždy, když jeden z těchto výsledků dosadíme do jedné z původních rovnic, tak nám vyjde výsledek druhý, a tedy platí, že $a \times b = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{2}$. Což se rovná 4. Výsledek tedy je 4cm^2 .

Komentář: Většina řešitelů se k výsledku dostala správně, ovšem někteří zapomněli ukázat, že trojúhelník PRS se pravoúhlý a rovnoramenný, přičemž z tohoto faktu vychází celý výpočet, a proto je v řešení důležitý.

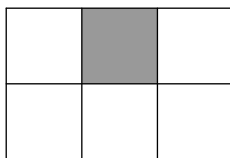
Úloha č. 6

Tyrannosaurus rex má obrázek obsahující několik čtverečků jako na obrázku 3. Má tři barvicí kameny; šedý, modrý a červený. Chtěl by každý čtvereček vybarvit jedním kamenem tak, aby čtverečky sousedící hranou měly vždy různou barvu. Některé čtverečky už vybarvil šedým kamenem jako na obrázku 3. Určete počet možností, jak mohl zbytek obrázku vybarvit. Výsledek zdůvodněte.



Obr. 3

Varianta za 3 body: dinosaurus obarvoval obrázek 4.



Obr. 4

Řešení: První způsob – tyrannosaurus má celkem 6 políček, které může obarvit šedou barvou. Nyní si všimněme, že v úseku mezi dvěma šedivými poli se musí střídat jen modrá a červená. To znamená, že jsou jen dvě možnosti, jak tento úsek obarvit (vždy začneme jednou ze dvou barev a zbylá políčka se musí střídat). Pro n umístěných šedivých polí dostaneme $n + 1$ těchto úseků, což znamená, že pro dané rozmístění šedivých polí máme vždy 2^{n+1} obarvení.

Šedivých polí můžeme umístit 0 až 6. Vždy pro daný počet musíme spočítat, kolika způsoby můžeme šedivá pole rozmístit. To můžeme dopočítat pomocí kombinačních čísel (více o kombinačních číslech v 1. průvodním povídání 39. ročníku), kdy vždy budeme vybírat n políček z celkových 6 možných. Pro $n = 0$, máme $\binom{0}{6} = 1$ způsob, pro $n = 1$ $\binom{1}{6} = 6$ způsobů, $n = 2$ má $\binom{2}{6} = 15$ způsobů, $n = 3$ má $\binom{3}{6} = 20$ způsobů, $n = 4$ má $\binom{4}{6} = 15$ způsobů, $n = 5$ má $\binom{5}{6} = 6$ způsobů a poslední $n = 6$ má $\binom{6}{6} = 1$ způsob.

Celkový počet možností, jak tyranosaurus mohl tabulku obarvit, je:

$$1 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2^3 + 20 \cdot 2^4 + 15 \cdot 2^5 + 6 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 1458$$

Druhý způsob – označme si políčka, která tyranosaurus obarvuje, postupně od levého krajního čísla 1 až k pravému krajnímu 13 (ze zadání šedá pole nečíslováme). Políčko číslo 1 můžeme obarvit jen dvěma způsoby. Řekněme, že ho obarvíme červeně. Políčko číslo 2 pak můžeme obarvit modře, nebo šedě. Pokud bude obarvené modře, musí být políčko 3 červené. Pokud bude šedivé, může být políčko 3 buď modré, nebo červené. Dohromady jsou tedy 3 způsoby, jak v závislosti na políčku 1 můžeme obarvit políčka 2 a 3.

Nyní si všimněme, že stejný počet obarvení bude mít dvojice políček 4 a 5, protože políčko 4 budeme moci obarvit šedou a barvou, která není na políčku 3 (tedy jednou z barev červená a modrá) a políčko 5 bude záviset na 4. Máme tedy znovu 3 způsoby obarvení pro každé předchozí. Tímto způsobem můžeme pokračovat a políčka si tak rozdělíme do 6 dvojic (2 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, 10 a 11, 12 a 13). Každou z těchto dvojic umíme obarvit třemi způsoby, políčko 1 celkem dvěma. Celkový počet možných obarvení tak bude $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^6 = 1458$.

Komentář: Hodně řešitelů se snažilo rozdělit úlohu na případy, nebo si ji rozdělit na menší části. Toto bohužel většinou vedlo k opominutí některých řešení, nebo naopak jejich vícenásobnému započítání. Chválím proto všechny, kdo si s úlohou zdárně poradili.

Úloha č. 7

Rubeosaurus si do písku napsal čísla od 1 do 100. V každém kroku si vybral dvě různá čísla, označme je x a y , smazal je a zpět do písku napsal buď $x + y$, nebo $x - 2y$. Takto mazal a psal, až mu zbylo pouze jediné číslo. Je možné, že toto zbylé číslo bylo 32? Popište, jak se k číslu 32 dostat, anebo zdůvodněte, proč to nelze.

Řešení: Nejprve se podíváme, jak jednotlivé operace mění součet všech napsaných čísel. Součet před každou operací si označíme S' a po operaci S . První

operace $x+y$ dopadne takto: $S = S' - x - y + (x+y) = S'$, tedy se součet nezmění. Druhá operace $x - 2y$ dopadne opět takto: $S = S' - x - y + (x - 2y) = S' - 3y$, jinak řečeno odečteme z výsledku trojnásobek druhého čísla. Jak už napovídá průvodní povídání, tak se nám bude hodit kongruence. Vzhledem k tomu, že součet můžeme měnit jen o trojnásobek nějakého čísla, tak zbytek po dělení 3 vždy zůstane stejný. Tedy abychom mohli nakonec dosáhnout čísla 32, tak musí platit $1+2+3+\dots+100 \equiv 32 \pmod{3}$. Pro součet původních čísel nám pomůže vzoreček $S_{1..n} = \frac{n(n+1)}{2}$. Po dosazení čísla 100 nám vyjde $S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Můžeme si ale všimnout, že $5050 \pmod{3} = 1$, kdežto $32 \pmod{3} = 2$. Protože zbytek po dělení 3 nelze změnit u součtu a na konci nám musí vyjít jiný zbytek, tak k číslu 32 dojít nelze.

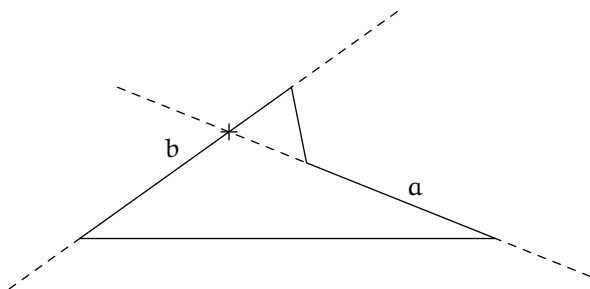
Komentář: Několik řešitelů se rozhodlo rovnou dokazovat různé zbytky po dělení 3, i když ještě nedokázali, že se během operací nemění. I když to je lehké a jasné, tak se stále jedná o část řešení a je třeba ji zapsat. Nicméně většina řešitelů měla pěkné důkazy, které by se často daly zveřejnit jako vzorové řešení.

Úlohy páté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Matouš Cimala, 2. Adam Dřínek, 3. Tomáš Flidr, 4. Eliška Vimmerová, 5. Vít Jiří Houfek, 6. Lukáš Koucký, 7. Vít Kaděra

Vzorová řešení a komentáře k 6. sérii úloh

Úloha č. 1

Giganotosaurus do skály vytesal opravdu zajímavý nekonvexní mnohoúhelník. Ať už by vybral kteroukoli stranu, mohl by ji prodloužit na přímku a tato přímka by právě jednou protнула jeho mnohoúhelník. Nakreslete jednu možnost, jak mohl giganotosaurův mnohoúhelník vypadat.



Obr. 5

Na obrázku 5 je ukázán nekonvexní mnohoúhelník, jehož strana a je prodloužena na přímku, kde tato přímka právě jednou protíná mnohoúhelník. Nejedná se ale o řešení, protože strana b v prodloužení na přímku neprotíná mnohoúhelník.

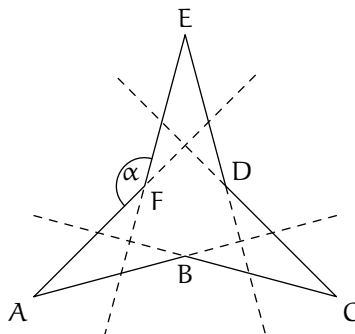
Řešení:

Zadání splňuje například pravidelná trojčipá hvězda na obrázku 6, tedy šestiúhelník ABCDEF. Úhel α má velikost 150° , útvar je tedy nekonvexní, a z obrázků jasně vidíme, že prodloužení každé strany protíná útvar právě jednou.

Komentář: Skoro všichni řešitelé si s úlohou bez problému poradili, jen bych připomněl, že i u takto jednoduché úlohy, kde se nevyžaduje postup, by řešení mělo být narýsováno pečlivě (tedy pravítkem nebo v grafickém programu).

Úloha č. 2

Na šachovnici velikosti 8×8 leží v pravém horním rohu kámen. Brontosaurus a apatosaurus se střídají v tazích, brontosaurus začíná. V jednom tahu hráč posune kámen buď o libovolný počet polí doleva, nebo o libovolný počet polí dolů



Obr. 6

(nesmí ale kámen posunout zároveň doleva i dolů). Vždy kámen musí posunout alespoň o jedno políčko. Kdo kámen posune na rohové políčko vlevo dole, vyhrál. Který hráč si dokáže zajistit výhru? Dobře vyhrávající strategii popište. Varianta za 3 body: Hraje se na šachovnici velikosti 3×3 .

Řešení: Výherní strategii má druhý hráč (Apatosaurus), protože může vždy zahrát tah stejný jako první hráč (Brontosaurus), akorát v druhém možném směru. Například pokud by Brontosaurus kamenem pohnul o 5 polí doleva, Apatosaurus pohne kamenem o 5 polí dolů. Tedy Apatosaurus vrátí kámen vždy na diagonálu mezi levým dolním a pravým horním rohem. Což znamená, že Brontosaurus nikdy nemůže dát kámen do levého dolního rohu, protože nemůže pohnout kamenem šikmo.

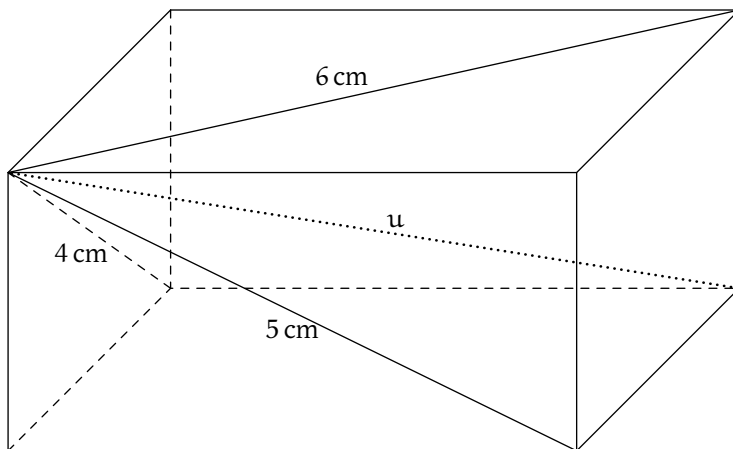
Komentář: Většina řešení byla naprosto perfektní. Lidé, co zvolili variantu pouze za tři body, zvládli úlohu také jednoduše.

Úloha č. 3

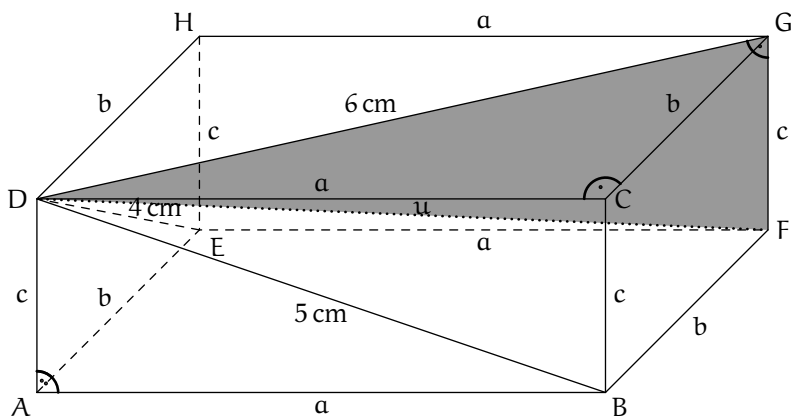
Utahraptor si ze stébel trávy vytvořil kostru kvádrů jako na obrázku 7. Změřil si, že délky stěnových úhlopříček jsou 4 cm, 5 cm, 6 cm. Spočítejte, jaká je délka tělesové úhlopříčky (na obrázku je tato úsečka označena písmenem u), a popište, jak jste k výsledku došli.

Řešení:

Označme si délky hran daného kvádrů a , b a c (viz obrázek 8). Poté díky kolmosti hran/stěn na sebe (jedná se o kvádr; stěny jsou obdélníky – v obdélníku vnitřní úhly jsou pravé) umíme stěnové úhlopříčky vyjádřit jako přepony z Pytha-



Obr. 7



Obr. 8

gorovy věty v pravém trojúhelníku:

$$a^2 + b^2 = 6^2,$$

$$a^2 + c^2 = 5^2,$$

$$b^2 + c^2 = 4^2.$$

Sečtením všech tří rovností pod sebou získáme následující rovnost, kterou

ještě ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 &= 6^2 + 5^2 + 4^2, \\2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &= 77, \\a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{77}{2}.\end{aligned}$$

Zároveň si všimneme také, že tělesová úhlopříčka s délkou u tvoří přeponu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnou stěnovou úhlopříčkou délky 6 a hranou c . Víme však, že $a^2 + b^2 = 6^2$, dosadím tedy do rovnosti následně:

$$\begin{aligned}6^2 + c^2 &= u^2, \\a^2 + b^2 + c^2 &= u^2.\end{aligned}$$

Již víme, že $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{77}{2}$, můžeme tedy dosadit a zjistíme, že $\frac{77}{2} = u^2$. Vzhledem k tomu, že u je délka, víme, že u je nutně nezáporné a mohu tedy rovnost odmocnit bez strachu ze ztráty možné záporné hodnoty u . Platí tedy, že $u = \sqrt{\frac{77}{2}}$, čímž jsme spočítali délku tělesové úhlopříčky a splnili zadání.

Komentář: Úlohu šlo vyřešit více způsoby - výše uvedený postup navíc vlastně ukazuje, že délka tělesové úhlopříčky v kvádru obecně je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = u$ a pokud si označíme různé zadané stěnové úhlopříčky x , y a z , poté i

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}} = u.$$

Úloha č. 4

Big Al si myslí taková kladná reálná čísla a, b, c , že $a < b < c$. Pak se zeptal sám sebe, jestli platí $b \cdot (a + c - b) > a \cdot c$. Rozhodněte, zda tato nerovnost platí, ať už by si kladná čísla $a < b < c$ myslel jakákoli. Pokud platí, tak to řádně zdůvodněte. Pokud neplatí, nalezněte konkrétní protipříklad.

Řešení:

Předpokládejme, že nerovnost platí a pokusme se ji dokázat. Nejdříve rozdělme podmínku v zadání, že $a < b < c$ na dvě podmínky $a < b$ a $b < c$, které ekvivalentní úpravou (odečtením celé levé strany) upravme na $0 < b - a$ a $0 < c - b$.

Nyní si upravme níže i samotné zadání pomocí ekvivalentních úprav a vytýkání/rozložení na součin:

$$\begin{aligned}b \cdot (a + c - b) &> a \cdot c \\b \cdot (c - b) + a \cdot b - a \cdot c &> 0 \\b \cdot (c - b) - a \cdot (c - b) &> 0 \\(b - a) \cdot (c - b) &> 0\end{aligned}$$

(kvůli ekvivalentním úpravám jde vlastně o tu „stejnou nerovnost“)

Všimněme si, že levá strana dokazované nerovnosti je z podmínky součin dvou kladných reálných hodnot $b - a$ a $c - b$. Z toho plyne, že i součin/levá strana nerovnosti musí být kladná - a tedy větší než 0 - nutně tedy platí naše upravená nerovnost a důkaz hotov (podrobněji v komentáři).

Komentář: Kvůli ekvivalentnosti úprav je vzorové řešení správné. Je však obvyklé sepisovat důkaz nerovností v opačném sledu než mnohdy řešíme, a to od nerovnosti, o které víme, že platí, se snažíme dostat k nerovnosti, kterou chceme dokázat. Pokud jsme si jistí svými úpravami, tak doporučuji alespoň krátce odargumentovat. Tento aspekt řešení jsem však kvůli analogickému/ekvivalentnímu postupu nehodnotila (tedy nestrhávala za něj body). Jinak děkuji za všechna řešení, která jsem obdržela. Byla jsem často až překvapená, kolik důkazu bylo velmi originálních a formálně bezchybných. Gratuluji všem řešitelům!

Úloha č. 5

Supersaurus a sauroposeidon hází kameny do dolíku. Oba začínají se stejným počtem kamenů a v házení se střídají po jednom hodu. Víme, že supersaurus se trefí celkem 17 krát a sauroposeidon celkem 14 krát. Musí během hry nutně nastat situace, kdy se počet kamenů, které sauroposeidon již strefil, rovná počtu kamenů, které supersaurus teprve strefí? Odpověď zdůvodněte.

Varianta za 3 body: Každý se strefil právě třikrát. Jinak je zadání stejné.

Řešení: Počet trefených kamenů nazvěme u sauroposeidona a a u supersaura b . Na začátku hry má supersaurus 17 kamenů, které musí strefit. Zjišťujeme tedy, zda vždy musí nastat moment, kdy $a = 17 - b$. Na začátku hry je a i b rovno 0, tedy na levé straně vztahu je 0 a na pravé 17. Po každém hodu se rozdíl a a $17 - b$ buď zmenší o jedna, nebo zůstane stejný. Pokud se trefí supersaurus, b se zvětší o jedna a tím se hodnota výrazu $17 - b$ zmenší o jedna. Pokud se trefí sauroposeidon, zvětší se a o jedna. Pokud se některý z dinosaurů netrefí,

hodnota výrazů se nezmění. Na konci hry $a = 14$ a $b = 17$, tedy $17 - b = 0$. Vzhledem k tomu, že na začátku bylo a menší než $17 - b$ a na konci je a větší než $17 - b$, a k tomu, že rozdíl mezi nimi se vždy změnil o 0 nebo o 1, musí vždy nastat moment, kdy $a = 17 - b$ (vzhledem k tomu, že pracujeme s přirozenými čísly). Proto situace ze zadání musí nutně nastat.

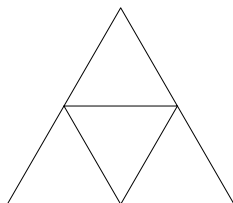
Komentář: Většina řešitelů správně dospěla k tomu, že situace vždy musí nastat, někteří z nich ovšem neúplně zdůvodnili, proč tomu tak vždy musí být, například nenapsali, že se hodnota výrazu po každém hodu mění maximálně o jedna.

Úloha č. 6

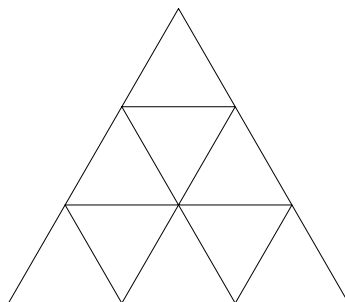
Rodině ankylosaurů Trojúhelníkových rostou na zádech trojúhelníkové kameny. Po prvním roce má ankylosaurus Trojúhelníkový na zádech jeden kámen, po druhém 4 kameny, po třetím 9 kamenů, rostou pravidelně dle obrázků 9, 10 a 11.



Obr. 9



Obr. 10



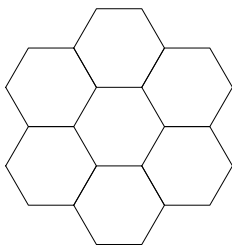
Obr. 11

Rodině ankylosaurů Šestiúhelníkových rostou na zádech šestiúhelníkové kameny a rostou každým rokem postupně dle obrázků 12, 13 a 14. Mohl nějaký ankylosaurus Trojúhelníkový mít na zádech o 3001 více kamenů než nějaký ankylosaurus Šestiúhelníkový (jejich věky mohou být různé)? Pokud ano, určete jejich věky. Pokud ne, zdůvodněte.

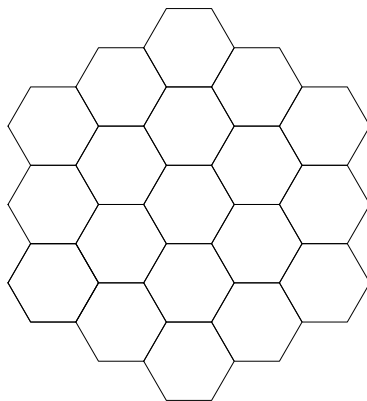
Řešení: Ankylosaurům Trojúhelníkovým každým rokem naroste lichý počet kamenů, který je o dva kameny větší než rok předchozí (první rok narostou 3 kameny, druhý rok 5 kamenů, třetí rok 7 kamenů...). To znamená, že se pravidelně opakuje v cyklech o třech rocích přírůstek kamenů, první rok naroste počet kamenů o $n \equiv 0(\text{mod}3)$, druhý rok o $n \equiv 2(\text{mod}3)$ a třetí o $n \equiv 1(\text{mod}3)$. Jelikož



Obr. 12



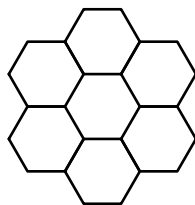
Obr. 13



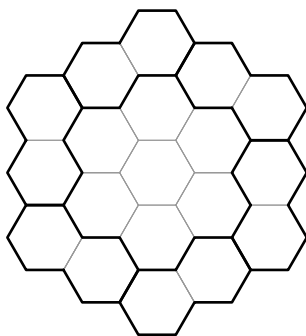
Obr. 14

začínáme na jednom kameni, tak může celkový počet kamenů nabývat pouze hodnot $k_1 \equiv 1 \pmod{3}$ nebo $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$.

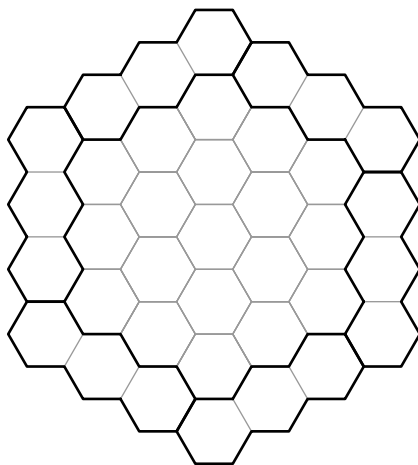
Nyní přejdeme k ankylosaurům Šestiúhelníkovým. První rok bude mít ankylosaurus na zádech 1 kámen, druhý už 7 kamenů, další 19. Počet kamenů se každým rokem zvýší o násobek šesti, který se zvyšuje každým rokem o 6r, kde r udává rok.



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Z toho vyplývá, že počet kamenů na zádech ankylosaura Šestiúhelníkového $k_2 \equiv 1 \pmod{3}$ (na začátku je jeden kámen, každý rok počet naroste o násobek tří).

Uvědomme si, že $3001 \equiv 1 \pmod{3}$

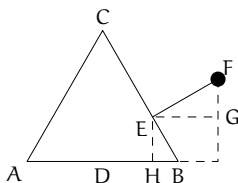
Ze zadání vyplývá, že $k_1 - k_2 = 3001$, tzn. musí platit, že $k_1 - k_2 \equiv 1 \pmod{3}$. Toho ovšem nelze dosáhnout, protože víme, že $k_2 \equiv 1 \pmod{3}$, takže poté by pro k_1 muselo platit $k_1 \equiv 2 \pmod{3}$. My si dokázali, že počet kamenů k_1 může nabývat pouze hodnot $k_1 \equiv 1 \pmod{3}$ nebo $k_1 \equiv 0 \pmod{3}$. To znamená, že ankylosaurus Trojúhelníkový nikdy nemůže mít na zádech o 3001 více kamenů než nějaký ankylosaurus Šestiúhelníkový.

Komentář: Velká část řešitelů zapsala posloupnosti narůstání počtu kamenů, ale zapoměla je dokázat nebo vůbec nevysvětlila, jak k posloupnostem přišla. Chválím tedy všechny, co měli kompletní důkaz. :)

Úloha č. 7

Achillobator má kámen ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, každá hrana má délku 9 cm. Jehlan položil nějakou stěnou na zem a nějakou jinou stěnu, která tedy nutně míří do vzduchu, pojmenoval S. Do těžiště stěny S ve směru kolmém ke stěně S zabodl špendlík o délce $3 \cdot \sqrt{3}$ cm. Jak vysoko je hlavička špendlíku od země? Předpokládáme, že špendlík je celou svou délkou mimo kámen. Napište a zdůvodněte výpočet. Stačí uvážit pouze jednu libovolnou variantu, kterou stěnu dáte na zem a která stěna bude S. Namísto pravidelného čtyřbokého jehlanu můžete zvolit pravidelný čtyřstěn (tedy trojboký jehlan, jehož stěny i základna jsou rovnostranné trojúhelníky).

Řešení:



Obr. 18

Úlohu budeme řešit pro jehlan postavený na čtvercové podstavě. Řešení pro čtyřstěn a jiné položení jehlanu zde zmiňovat nebudeme, protože jsou obdobná tomu, které popíšeme níže.

Uvažujme rovinu, ve které úlohu budeme řešit. Ta vypadá jako na obrázku 18. Bude procházet špendlíkem, hlavním vrcholem jehlanu (bod C) a středy dvou protějších hran podstavy, z nichž jedna hrana je zároveň hranou stěny, v níž je zapíchnutý špendlík (body A a B).

Dále si definujeme některé body, které využijeme při výpočtu. První je bod D, který leží v patě výšky trojúhelníku ABC z vrcholu C. Jelikož je trojúhelník ABC rovnoramenný, bod D je zároveň střed úsečky AB. Jako bod E jsme si označili bod, kde je zapíchnutý špendlík, a bod F, kde je konec špendlíku. Dále se nám bude hodit bod G, který je vůči úsečce AB kolmo pod bodem F a který je stejně vysoko nad úsečkou AB jako bod E. Nakonec si definujeme bod H, který leží na úsečce AB kolmo pod bodem E.

Nejprve se podíváme na úsečky, jejichž délku známe ze zadání. Úsečka AB je výška čtvercové podstavy. Má tedy stejnou délku jako strana podstavy, což je 9 cm. Úsečky AC a BC jsou výšky rovnostranných trojúhelníků, tím pádem jsou dlouhé $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9$ cm (délka hrany jehlanu). Dále ze zadání známe délku úsečky EF, která je $3 \cdot \sqrt{3}$ cm. Pomocí Pythagorovy věty si můžeme vypočítat délku úsečky DC: $|DC| = \sqrt{|CB|^2 - (\frac{|AB|}{2})^2} = \sqrt{(\frac{9\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{9}{2})^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm.

Bude se nám také hodit znát velikost úhlu ABC, jehož velikost vypočítáme pomocí funkce cosinus: $|\sphericalangle ABC| = \cos^{-1}(\frac{|BI|}{|DB|}) = \cos^{-1}(\frac{4.5}{\frac{9\sqrt{2}}{2}}) = 54^\circ 44'$. Úhel BEG je jeho střídavý úhel, tudíž má stejnou velikost ($54^\circ 44'$). Úhel GEF je doplňkem k úhlu BEG do 90° , úhel GEF má tedy velikost $90^\circ - 54^\circ 44' = 35^\circ 16'$.

Těžiště rozděluje těžnici v poměru 2:1 a je blíže straně, ze které těžnice vychází. To znamená, že $|EB| = \frac{|BC|}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

Výšku hlavičky špendlíku spočítáme po částech: vzdálenost bodu E nad úsečkou AB a vzdálenost od bodu E od bodu F. Pro obě použijeme funkci sinus:

$$|EH| = |DB| \cdot \sin(|\sphericalangle ABC|) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \sin(54^\circ 44') = 2.12$$

$$|FG| = |FE| \cdot \sin(|\sphericalangle GEF|) = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(35^\circ 16') = 3$$

Hlavička špendlíku je tedy ve výšce 5,12 cm.

Komentář: Častá chyba v této úloze byl předpoklad, že průřez jehlanu je rovnostranný trojúhelník. Byť se mu průřez podobá, tak tam je rozdíl, který se promítne ve výsledku úlohy. Pokud narazíte na podobnou úlohu, tak je nejprve třeba se pořádně zamyslet nad jednotlivými délkami v průřezu.

Úlohy šesté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Adamantisaurus Dřínex, 2. Vitakrisaurus, 3. Lukousaurus, 4. Terezinosaurus, 5. Sarahsaurus, 6. Elaltitan, 7. Vitakridrinda

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 6. sérii

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
1.–2.	1.	Miroslav Hrinko	8. GCDP	5	5	5	5	5	5	4	-	30	180
	1.	Jan Němeček	9. NPRG	5	5	5	5	5	5	5	-	30	180
3.	2.	Dan Školař	9. ZSBR	5	5	5	5	5	5	5	-	30	178
4.	2.	Tomáš Kvapil	8. PORG	5	5	5	5	4	5	-	-	29	173
5.	3.	Matěj Krivánek	9. GMBU	4	5	5	5	4	-	4	-	27	172
6.	4.	Martin Dostál	9. GCHO	4	5	5	5	5	-	4	-	28	169
7.	5.	Robin Tesař	9. GCDP	5	5	5	5	-	5	3	-	28	167
8.	6.	Jiří Grepl	9. ZGUP	5	5	5	5	5	4	5	-	30	159
9.	7.	Noel Probst	9. PORG	2	5	5	5	-	2	3	-	22	158
10.–11.	1.	David Kabelka	7. NPRG	5	5	5	-	-	3	-	-	18	153
	8.	Alžběta Reitmayerová	9. GSPP	4	5	5	-	-	-	-	-	14	153
12.	1.	Jakub Zelenka	6. GRIC	5	5	5	5	5	2	3	-	28	151
13.	3.	Lukáš Kopecký	8. GAJL	5	5	5	5	-	5	5	-	30	148
14.	2.	Petr Kysela	7. GCKR	5	5	2	5	4	4	3	-	26	146
15.	4.	Metodej Samal	8. ZKVL	5	5	5	5	5	5	-	-	30	144
16.	3.	Adam Urx	7. PORG	4	5	5	5	4	-	2	-	25	136
17.	9.	Jitka Stejskalová	9. ZNDC	5	5	3	3	4	3	3	-	23	125
18.	10.	Pavčina Petrželová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	119
19.–20.	5.	Eva-Margarita Migel	8. GNAP	1	2	-	5	-	3	-	-	11	115
	11.	Tyge Matthews	9. GNSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	115
21.	4.	Agnes Dostálová	7. GMNP	5	4	5	-	-	-	-	-	14	114
22.	5.	Ján Minárik	7. GABP	4	5	5	5	-	-	3	-	22	107
23.	12.	Lukas Stanovsky	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	103
24.–25.	6.–7.	Vít Lukavský	8. ZMNK	-	-	-	-	-	-	-	-	0	100
		Matěj Matyáška	8. ZKON	-	3	1	3	2	2	-	-	11	100
26.–27.	6.–7.	Magdaléna Pelikánová	7. GBUP	5	5	-	-	-	-	-	-	10	98
		Alžběta Pelikánová	7. GBUP	5	5	-	-	-	-	-	-	10	98
28.	8.	Sofie Kaucká	8. GOPG	5	5	-	-	4	4	5	-	23	96
29.	8.	Adéla Manová	7. GLPP	5	5	5	-	5	3	-	-	23	95
30.	9.	Martina Vojteková	7. PORG	5	-	5	5	-	-	-	-	15	92
31.	2.	Antonín Červený	6. GCDP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	89
32.–33.	9.–10.	Stanislav Beneš	8. GJNP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	87
		Jakub Hrabálek	8. ZSJN	-	5	-	5	4	-	-	-	14	87
34.	3.	Matias Eisner	6. ZLTP	-	5	-	-	-	5	-	-	10	81
35.–36.	10.	Karel Olšar	7. GCKR	5	-	2	-	1	-	-	-	8	80
	13.	Matyáš Hazdra	9. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	80
37.–38.	4.	Maxmilian Čovan	6. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	73

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	1	2	3	4	5	6	7	P	σ	Σ
37.–38.	14.	Matěj Kubín	9. GLIP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	73
39.	11.	Lada Karásková	7. PORG	4	3	-	-	-	-	-	-	7	72
40.	12.	Veronika Loudová	7. GNPAP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	69
41.	11.	Matěj Kiapeš	8. ZKON	4	3	-	3	1	-	-	-	11	67
42.	12.	Jiří Mlynář	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	66
43.	13.	Adam Donát	7. GCDP	4	-	-	2	-	-	-	-	6	65
44.	15.	Josefína Svatušková	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	64
45.	16.	Vojtěch Kadlec	9. PORG	-	5	5	-	-	-	-	-	10	63
46.–47.	1.	Marek Houfek	5. ZCHP	5	3	5	-	-	-	-	-	13	59
	17.	Jana Malkovská	9. ZGUP	5	5	5	-	-	-	5	-	20	59
48.	18.	Mariana Warausová	9. GKSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	53
49.–50.	14.–15.	Vlastimil Straka	7. ZTRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	48
		Bedřich Škop	7. GMSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	48
51.–52.	13.	Radka Valkovičová	8. ZOKZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	47
	19.	Gleb Baulin	9. GPKV	-	-	-	-	-	-	-	-	0	47
53.	16.	Vojtěch Bárta	7. GLIP	-	-	5	-	-	-	-	-	5	46
54.	20.	Šimon Pelák	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	44
55.	17.	Jaroslav Posch	7. GMKR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	42
56.	21.	Františka Cindrová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	39
57.	14.	Roman Chasovskikh	8. GKMP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	38
58.	22.	Tomáš Blahout	9. GCHE	5	-	5	3	1	-	-	-	14	37
59.	23.	Marek Nechvátal	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	36
60.	18.	Hana Korejsová	7. ZPSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	35
61.–62.	5.	Dominik Holtan	6. GMSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	34
	24.	Kateřina Tesař	9. NPRG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	34
63.	19.	Pavčina Břizová	7. GTNV	-	-	-	-	-	-	-	-	0	30
64.	25.	Viola Filipová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	29
65.	15.	Jan Foldyna	8. ZAJP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	28
66.	6.	Jonas Koucky	6. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	27
67.–68.	7.	Patrik Nedvěď	6. ZSTD	-	-	-	-	-	-	-	-	0	25
	20.	Emma Tereza Collis	7. GMSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	25
69.–71.	21.–22.	Adam Kozák	7. ZTRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
		Natanael Školoud	7. DOM	5	5	-	-	-	-	-	-	10	24
	16.	Mikuláš Krubner	8. GBEN	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
72.	2.	Anna Kvapilová	5. GZHP	5	5	-	-	-	-	-	-	10	23
73.	17.	Nikolas Doležal	8. ZKYS	-	-	-	-	-	-	-	-	0	22
74.–75.	8.	Čestmír Hlaváček	6. GABP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21
	18.	Karel Kanický	8. ZKYS	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21
76.–77.	19.	Jan Daniel Elleder	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
	26.	Matěj Pavlok	9. ZERM	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
78.–79.	9.	Karolína Tarant	6. NPRG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
	20.	Adéla Sůkeníková	8. ZLJN	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
80.–81.	10.	Victoria Bartůňková	6. ZMAC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
	21.	Petr M. Grametbauer	8. ZLOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
82.	27.	David Výborný	9. GHUM	-	-	-	-	-	-	-	-	0	17
83.-84.	23.-24.	Vojtěch Pešl	7. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
		Barbora Sujová	7. GLPP	5	2	4	2	1	-	2	-	16	16
85.-91.	11.	Marie Reitmayerová	6. GGJP	5	5	5	-	-	-	-	-	15	15
	25.	Richard Bechera	7. GRIC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	22.-23.	Kristian Poljak	8. GPRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Dorota Slamková	8. GOHR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	28.-30.	Barbora Bouchnerová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Jakub Pešl	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Jan Rosík	9. ZSPP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
92.	24.	Matteo Dalrymple	8. ZSBR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
93.	26.	Robert Faltys	7. ZLUZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11
94.	3.	Anna Menšíková	5. ZBJP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
95.-96.	27.	Olda KOZMON	7. GPRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
	25.	Lenka Pulkrábková	8. ZBOB	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
97.-100.	1.	Jakub Kvapil	2. GZHP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
	4.	Josef Školoud	5. DOM	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
	31.-32.	Jonáš Dinga	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
		Václav Vokůrka	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
101.	12.	Viktoriiia Anisimová	6. ZLUZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
102.	26.	Sebastian Mlích	8. GMOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3
103.	27.	Marie Hošková	8. GABP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2
104.-105.	33.	Elena Šlaisová	9. ZMEC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1