

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

v rukou právě držíte v pořadí už šestý leták 40. ročníku Pikomatu. V něm naleznete zadání poslední šesté série a výsledky a vzorová řešení čtvrté série. Šestá série má termín odeslání 12. května 2025.

Soustředění

Mezi 2. a 10. dubnem se uskutečnilo tradiční jarní soustředění ve Strmilově pro nejlepší řešitele prvních čtyřech sérií. Konaly se soutěže a hry nebo matematické přednášky a semináře. Dle výsledků z posledních dvou sérií budeme vybírat účastníky podzimního soustředění, takže neváhejte nám posílat svoje řešení.

Tábor

Přihlásit se můžete také na náš letní tábor Pikomatu, který se bude konat 26. 7. – 9. 8. v Bratrouchově, a to konkrétně na našich stránkách, stále je volná kapacita. Rádi zde uvidíme každého, kdo má matematiku alespoň trochu rád a chce se dozvědět více než ve škole.

Další akce Pikomatu

Pořádáme také kratší akce. 9.–11. května je na programu Pikomatí Puťák. Chystáme se do překrásné přírody Kokořínska a užijeme si víkend plný pohybu a společných zážitků. Pravidelnou akcí pak je Pikoúterý, konající se v úterý večer v karlínské budově Matfyzu. Setkáte se zde s organizátory, poslechnete si zajímavou matematickou přednášku a poté si zahrajete deskové hry. Další informace o Pikomatu naleznete na našem webu, případně na našem Instagramu. Veškeré dotazy posílejte na e-mail pikomat@mff.cuni.cz.

Příměstský letní tábor Matematika s vědeckými pokusy

Dům dětí a mládeže Modřany v létě pořádá příměstské tábory Matematika s vědeckými pokusy. Pokud se necítíte na klasický dvoutýdenní tábor, ale rádi byste i v létě pronikli do světa matematiky, jedná se pro vás o správnou volbu. Více informací naleznete na <https://www.ddmm.cz/tabory/>.

Hodně úspěchů a zábavy při řešení šesté série vám přejí

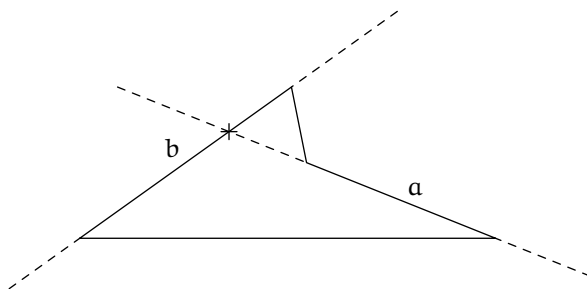
Vaši organizátoři

Zadání úloh 6. série 40. ročníku

Termín odeslání: 12. května 2025

V letech 1877 až 1892 probíhala na západě USA tzv. „Válka o kosti“, kdy soutěžili dva paleontologové o větší slávu. V rámci jejich nevybíravého soupeření došlo i k vyhazování nálezů dynamitem, aby jej nemohl prozkoumat ten druhý.

Úloha č. 1: *Giganotosaurus do skály vytesal opravdu zajímavý nekonvexní mnohoúhelník. Ať už by vybral kteroukoli stranu, mohl by ji prodloužit na přímku a tato přímka by právě jednou protнула jeho mnohoúhelník. Nakreslete jednu možnost, jak mohl giganotosaurův mnohoúhelník vypadat.*



Obr. 1

Na obrázku 1 je ukázán nekonvexní mnohoúhelník, jehož strana *a* je prodloužena na přímku, kde tato přímka právě jednou protíná mnohoúhelník. Nejedná se ale o řešení, protože strana *b* v prodloužení na přímku neprotíná mnohoúhelník.

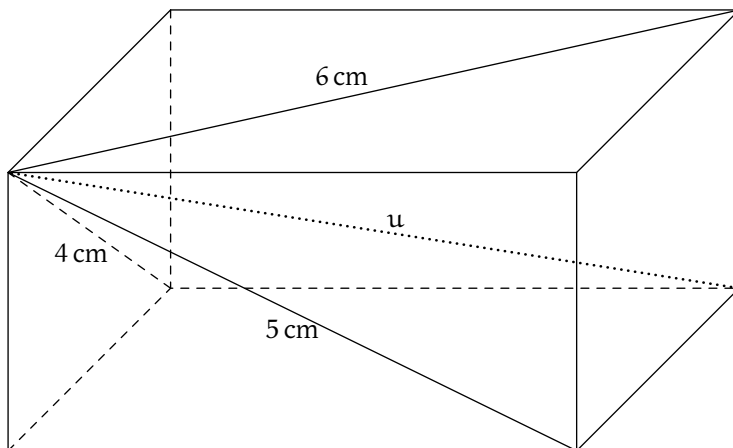
Roku 1879 byl popsán *Brontosaurus*, akorát se roku 1903 ukázalo, že se jedná o již popsáný rod *Apatosaura* z roku 1877, takže označení *Brontosaurus*, navzdory obecné oblíbenosti, je neplatné. Až na to, že nové skutečnosti z roku 2015 skutečně potvrzují existenci jedinečného rodu *Brontosaurus*.

Úloha č. 2: *Na šachovnici velikosti 8×8 leží v pravém horním rohu kámen. *Brontosaurus* a *apatosaurus* se střídají v tazích, *brontosaurus* začíná. V jednom tahu hráč posune kámen buď o libovolný počet polí doleva, nebo o libovolný počet polí dolů (nesmí ale kámen posunout zároveň doleva i dolů). Vždy kámen musí posunout alespoň o jedno políčko. Kdo kámen posune na rohové políčko vlevo dole,*

vyhrál. Který hráč si dokáže zajistit výhru? Dobře vyhrávající strategii popište. Varianta za 3 body: Hraje se na šachovnici velikosti 3×3 .

Navzdory obecně přijímané představě, že různé druhy raptorů žily a lovily ve smečkách (jedna smečka by obsahovala jen jeden druh), nemáme dodnes průkazné důkazy, že tomu tak skutečně bylo. Dokonce některé dřívější ukazatele takového chování byly vyloučeny jako špatně interpretované. (Například utahraptoři chycení v dehtovém močálu v průběhu času.)

Úloha č. 3: Utahraptor si ze stébel trávy vytvořil kostru kvádrů jako na obrázku 2. Změřil si, že délky stěnových úhlopříček jsou 4 cm, 5 cm, 6 cm. Spočítejte, jaká je délka tělesové úhlopříčky (na obrázku je tato úsečka označena písmenem u), a popište, jak jste k výsledku došli.



Obr. 2

Big Al je jeden z nejlépe zachovaných fosilních exemplářů. Takto pojmenovaný Alosaurus v říčním sedimentu nese svědectví o svém nelehkém životě plném četných zranění. Paleontologové se z kostry naučili mnoho nového o životě theropodů a z Big Ala (asi teda nakonec samice, ups) se stala celebrita díky speciální epizodě ze seriálu BBC „Walking with dinosaurs“.

Úloha č. 4: Big Al si myslí taková kladná reálná čísla a, b, c , že $a < b < c$. Pak se zeptal sám sebe, jestli platí $b \cdot (a + c - b) > a \cdot c$. Rozhodněte, zda tato nerovnost

platí, ať už by si kladná čísla $a < b < c$ myslel jakákoli. Pokud platí, tak to řádně zdůvodněte. Pokud neplatí, nalezněte konkrétní protipříklad.

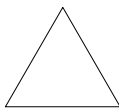
V průběhu minulého století se opakovaně objevují myšlenky, že velcí sauropodi nemohli chodit po souši a museli žít ve vodě, která je měla nadnášet. Moderní poznatky tyto teorie vyvracejí. Sauropodi žili na souši.

Úloha č. 5: *Supersaurus a sauroposeidon hází kameny do dolíku. Oba začínají se stejným počtem kamenů a v házení se střídají po jednom hodu. Víme, že supersaurus se trefí celkem 17krát a sauroposeidon celkem 14krát. Musí během hry nutně nastat situace, kdy se počet kamenů, které sauroposeidon již strefil, rovná počtu kamenů, které supersaurus teprve strefí? Odpověď zdůvodněte.*

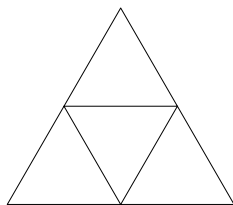
Varinta za 3 body: Každý se strefil právě třikrát. Jinak je zadání stejné.

Ještě než Zemi zasáhl meteorit (u poloostrova Yucatan), byla Země na pokraji masového vymírání v důsledku zvýšené vulkanické aktivity. Pokud někteří dinosauri přežili kataklyzmatický dopad 10-15kilometrového tělesa, po miliony let trvající zvýšená sopečná aktivita je dorazila.

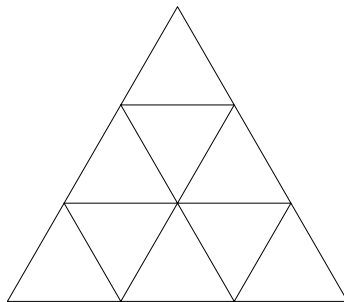
Úloha č. 6: *Rodině ankylosaurů Trojúhelníkových rostou na zádech trojúhelníkové kameny. Po prvním roce má ankylosaurus Trojúhelníkový na zádech jeden kámen, po druhém 4 kameny, po třetím 9 kamenů, rostou pravidelně dle obrázků 3, 4 a 5.*



Obr. 3



Obr. 4

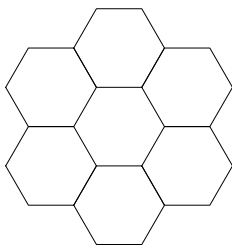


Obr. 5

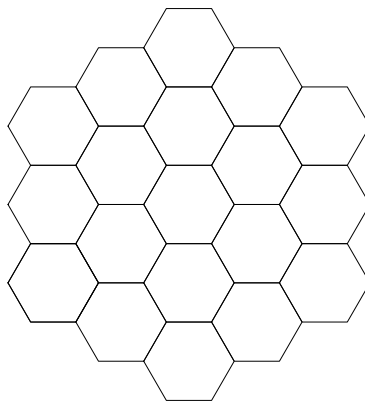
Rodině ankylosaurů Šestiúhelníkových rostou na zádech šestiúhelníkové kameny a rostou každým rokem postupně dle obrázků 6, 7 a 8. Mohl nějaký ankylosaurus Trojúhelníkový mít na zádech o 3001 více kamenů než nějaký ankylosaurus Šestiúhelníkový (jejich věky mohou být různé)? Pokud ano, určete jejich



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

věky. Pokud ne, zdůvodněte.

K–Pg rozhraní je geologickou hranicí mezi druhohorami a třetihorami, kterou lze pozorovat po celém světě a datujeme ji do doby $66,043 \pm 0,043$ milionu let. Vznikla po dopadu velkého meteoritu, je široká několik až několik desítek centimetrů, je vizuálně odlišitelná a vyznačuje se zvýšeným obsahem iridia (důkaz meteoritu).

Úloha č. 7: Upozorňujeme, že úloha má od 4. 5. 2025 upřesněné zadání.

Achillobator má kámen ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, každá hrana má délku 9 cm. Jehlan položil nějakou stěnou na zem a nějakou jinou stěnu, která tedy nutně míří do vzduchu, pojmenoval S. Do těžiště stěny S ve směru kolmém ke stěně S zabodl špendlík o délce $3 \cdot \sqrt{3}$ cm. Jak vysoko je hlavička špendlíku od země? Předpokládáme, že špendlík je celou svou délkou mimo kámen. Napište a zdůvodněte výpočet. Stačí uvážit pouze jednu libovolnou variantu, kterou stěnu dáte na zem a která stěna bude S. Namísto pravidelného čtyřbokého jehlanu můžete zvolit pravidelný čtyřstěn (tedy trojboký jehlan, jehož stěny i základna jsou rovnostranné trojúhelníky).

Vzorová řešení a komentáře k 4. sérii úloh

Úloha č. 1

V řadě na kamennou polévku stojí nekonečno dinosaurů. Každý dinosaurus buď polévku dostane, nebo ne. Dinosaurus, co polévku rozdává, řekl, že polévku dostane právě jeden z prvních dvou dinosaurů v řadě. První dinosaurus v řadě řekl, že polévku dostane právě jeden ze tří dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Druhý dinosaurus řekl, že polévku dostane právě jeden ze čtyř dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Třetí dinosaurus řekl, že polévku dostane právě jeden ze dvou dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Výroky dinosaurů se takto opakují, tedy čtvrtý hovoří o třech dinosaurech za ním, pátý o čtyřech, šestý o dvou, ... Určete, jestli polévku dostane 99. dinosaurus v řadě. Odpověď zdůvodněte.

První způsob řešení (nápaditě): Pro větší přehlednost si označme jednotlivé výroky. Prohlášení nultého (polévku rozdávajícího), třetího, šestého a dále každého třetího dinosaura označíme *výrok 1*, dále tvrzení prvního, čtvrtého, sedmého atd. *výrok 2* a analogicky *výrok druhého*, *pátého* osmého a dalších *výrok 3*. Vzhledem k tomu, že výroky se opakují vždy po třech dinosaurech, situace s výdejem polévek se bude opakovat se stejnou periodou.

Nyní se zaměříme na *výrok 1* a *výrok 3*. Označíme jako n takovou pozici dinosaura, která je dělitelná 3. Pak pro libovolné přirozené n podle *výroku 1* (řečeného dinosaurem n) má polévku dostat právě jeden z dinosaurů $n + 1$ a $n + 2$ a zároveň ji má dle *výroku 3* (vyneseného dinosaurem $n - 1$) dostat právě jeden z dinosaurů $n, n + 1, n + 2, n + 3$. Při platnosti obou výroků pak polévku dostane právě jeden z dinosaurů $n + 1$ a $n + 2$ a naopak žádný z dinosaurů n a $n + 3$ polévku nedostane. A tedy, protože n je libovolné (a zároveň $n + 3$ je zřejmě dělitelné 3), žádný dinosaurus stojící na pozici dělitelné třemi nedostane polévku.

Pozice 99 je dělitelná třemi, dinosaurus na ní stojící tak má bohužel smůlu a zůstane o hladu.

Druhý způsob řešení (přímočaře): Podívejme se na jednotlivé případy, které při výdeji polévek mohou nastat. Nejprve uvažujme situaci, kdy první dinosaurus polévku nedostane. Pak podle *výroku 1* nultého dinosaura musí polévku dostat dinosaurus 2. Dále využijeme *výrok 2* prvního dinosaura, a bez polévky tak budou třetí i čtvrtý dinosaurus. Pátý naopak polévku dostane aplikací *výroku 1* od

dinosaurů 3. Šestý a sedmý dinosaur zůstanou bez polévky. S každou trojicí po sobě jdoucích dinosaurů se tato tvrzení opakují. Pro obecné n dělitelné 3 proto můžeme výše popsaným způsobem použití jednotlivých výroků dále střídat. Tedy polévku vždy dostane vždy $n + 2$. dinosaur a n . a $n + 1$. nikoli.

Nyní se zaměříme na případ, kdy naopak polévku první dinosaur dostane. Druhý ji pak dostat nemůže podle výroku 1 dinosaur 0. Dále polévku dostane právě jeden z dinosaurů 3 a 4. V prvním případě bude mít polévku 3, dinosaur 4 nikoli a podle výroku 1 dinosaur 3 tak polévku bude muset dostat 5. Podle výroku 3 dinosaur 2 však polévku obdrží právě jeden z dinosaurů 3 až 6. Dostáváme tedy spor, tento případ nemůže nastat.

Poslední variantou je, že polévku získají dinosauri 1 a 4, zatímco 2 a 3 ne. Pak dle výroku 3 dinosaur 2 budou bez polévky dinosauri 5 a 6, naopak podle výroku 2 dinosaur 4 ji bude muset dostat 7. Analogicky 8 a 9 zůstanou o hladu, zatímco dinosaur 10 se jistě dosyta nají. Stejně jako v prvním případě se výroky 2 a 3 opakují s každou po sobě jdoucí trojicí dinosaurů, jejich aplikací proto dostaneme, že pro obecné n dělitelné 3 polévku vždy dostane vždy $n + 1$. dinosaur a n . a $n + 1$. nikoli.

Zadání úlohy se nás ptá na osud dinosaur 99. Jeho číslo je dělitelné třemi beze zbytku, bude tedy ve stejné pozici, jako dinosauri 3, 6, 9, ..., tedy, jak v prvním, tak v posledním případě, polévku nedostane.

Komentář: Většina řešitelů zvolila první způsob řešení, ačkoli se ne každému podařilo ukázat, že pro všechny dinosaury stojící na pozici, která je dělitelná třemi, je situace stejná. V takových případech jsem zpravidla strhával dva body. Nemálo řešení bylo založeno na druhé metodě, kde však ne všichni odhalili dvě možné posloupnosti, jak polévku servírovat. Pokud byla jedna z možností rozebrána správně, opět jsem uděloval většinou tři body.

Úloha č. 2

Troodon má hromádku standardních kostek. O standardní kostce vždy platí, že součet teček na protějších stěnách je 7. Postavil jednu věž ze všech kostek hromádky a kostky hezky srovnal, aby vznikl vysoký kvádr (dal je na sebe libovolně, nic po tečkách na sousedících stěnách nevyžadoval). Zjistil, že součet teček na každé ze 4 bočních stěn věže je sudý. Určete všechny možnosti, pro kolik kostek v hromádce se to mohlo stát. U těchto možností ukažte, že to opravdu jde. U ostatních možností zdůvodněte, proč to nemůže jít.

Řešení: Pro tuto úlohu je důležité si uvědomit, že součet protějších stran kostky je 7 a musí se skládat z lichého a sudého čísla. Zároveň sudý výsledek můžeme

získat sečtením dvou sudých či dvou lichých čísel. Sečtením sudého a lichého čísla by vznikl lichý výsledek. Díky tomu, co jsme si již uvědomili, víme, že musíme vytvořit vždy páry sudých či lichých čísel. Páry se skládají vždy ze dvou prvků a jejich součet je sudý, tím pádem poté sčítáme pouze sudá čísla. Abychom vytvořili takovéto dvojice, musí být počet čísel (kostek) násobkem 2 neboli sudý. Proto, aby se mohla stát situace ze zadání, musí být počet kostek sudý.

Nyní musíme dokázat, že není možné, aby věž byla vysoká lichý počet kostek. Na jedné straně bychom měli páry, které vycházejí sudě a k tomu jedno sudé číslo. Toto by celkově vyšlo, protože sčítáme společně pouze sudá čísla, ale musíme myslet i na protější stranu věže. Tam jsou znovu sudé páry, ale navíc tam je i jedno liché číslo. Toto by způsobilo, že i celkový součet by byl lichý a to by rozporovalo se zadáním. Troodon proto stavěl ze sudého počtu kostek.

Komentář: Hodně řešitelů zvládlo tuto úlohu velmi dobře, pouze někteří nedostatečně zdůvodnili svůj závěr či to nebylo úplně jasné z postupu. Za to jsme strhávali většinou dva body. Pokud bylo vysvětleno částečně, tak pouze jeden bod.

Úloha č. 3

Ouranosaurus má krychli velikosti $3 \times 3 \times 3$, kterou chce rozřezat na 27 krychlíček s hranou 1. Vždy po říznutí může vzniklé útvary na stole přeskládat, takže třeba budou čtyři za sebou. Při následujícím říznutí všechny díly rozřízne, tedy třeba rozřízne ty čtyři díly zároveň. Kolikrát nejméně musí ouranosaurus říznout? Ukažte, jak by takové řezání probíhalo, a zdůvodněte, proč méně říznutí nevystačí.

První způsob řešení: Všimněme si, že v krychli $3 \times 3 \times 3$ existuje malá krychlička $1 \times 1 \times 1$, která sousedí každou svou stranou s nějakou jinou menší krychličkou. (Jedná se o krychličku „uprostřed“ velké krychle, která žádnou stranou nezasahuje na povrch). Pokud chceme krychli rozdělit na krychličky $1 \times 1 \times 1$, budeme muset nějakým způsobem od každé krychličky odříznout všechny sousední. Vzhledem k tomu, že existuje krychlička, která sousedí s 6 dalšími a žádné dvě ze sousedících nemůžeme oddělit pomocí jednoho řezu, budeme potřebovat minimálně 6 říznutí. Nyní nám stačí ukázat, že řešení pomocí 6 řezů existuje.

Jednou možností, jak krychli pomocí 6 řezů rozřezat, je přeříznout krychli $3 \times 3 \times 3$ dvakrát po každé ose, přičemž s odříznutými díly nijak nehýbeme (pořád tvoří tvar krychle $3 \times 3 \times 3$, jen rozřezaný na více dílů). Dvakrát povedeme řez svisle seshora dolů, dvakrát zepředu dozadu a dvakrát zprava doleva.

Druhý způsob řešení: První řez je pevně daný. Rozdělí krychli $3 \times 3 \times 3$ na

kvádry $3 \times 3 \times 2$ a $3 \times 3 \times 1$. Nyní si všimněme, že jedním řezem můžeme nejvíce zdvojnásobit stávající počet dílků (všechny stávající dílky přerážneme na dvě části). Kvádr $3 \times 3 \times 2$ potřebujeme rozdělit na 18 krychlíček $1 \times 1 \times 1$. Abychom získali 18 dílků, budeme potřebovat aspoň 5 řezů, protože pomocí 4 řezů můžeme nejvíce získat 16 částí. Po přidání prvního řezu jsme tedy ukázali, že krychli není možné požadovaně rozdělit pomocí méně než 6 řezů. Opět nám už stačí ukázat, že řešení pomocí 6 řezů existuje. Postup dál se už tak neliší od prvního způsobu řešení.

Komentář: Velká část řešitelů přišla na způsob, jakým krychli pomocí šesti řezů rozdělit na menší krychličky. Často už ale chybělo zdůvodnění, proč to pomocí menšího počtu řezů nelze. Obecně vyzkoušení pouze několika konkrétních možností není dostatečným důkazem toho požadovaného tvrzení. Chválím proto všechny, kteří si s úlohou poradili.

Úloha č. 4

Plejtvák má tabulku 4×4 , v každém políčku je jeden žeton. Žeton je seshora černý, zespoda bílý. V jednom tahu vybere část tabulky o velikosti 2×2 a každý žeton v této oblasti převrátí. Kolik nejméně tahů plejtvák potřebuje, aby žetony celé tabulky tvořily šachovnicové obarvení? Ukažte, jaké tahy použít, a zdůvodněte, proč méně tahů nestačí.

Řešení: V tomto řešení popíšeme postup, který zahrnuje šest tahů, a ukážeme, proč je každý z nich nezbytný, tudíž zároveň dokážeme, že nelze použít méně než šest tahů. Políčka tabulky a žetony v nich si označíme čísly od jedné do šestnácti. Na začátku jsou všechny žetony seshora černé. Aby měla na konci tabulka šachovnicový vzor, musí být dva z jejích rohů na konci bílé. Za takové žetony si zvolíme 4 a 13. Dále upřesníme, že na pořadí kroků nezáleží, protože konečné otočení každého z žetonů závisí pouze na tom, kolikrát jsme ho celkově otočili. Začínáme se situací jako na obrázku 9.

V jednom z kroků musíme otočit žeton 4, jehož konečnou pozici jsme zvolili jako bílou. Toho lze dosáhnout otočením pouze jediné, rohové čtveřice 2×2 žetonů, tedy 3, 4, 7 a 8, viz obrázek 10.

V jednom z kroků musíme otočit také druhý rohový žeton 13, který má na konci být bílý, a to otočením jediné možné čtveřice 9, 10, 13 a 14, viz obrázek 11.

Těmito otočeními se ovšem nabídlo otočiti i políčka 3, 8, 9 a 14, která hranou sousedí s rohovými bílými políčky, tudíž musí být černá. Toho dosáhneme otočením dalších čtyř čtveřic. Obrátit žeton 3 lze zvolením dvou různých čtveřic

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 9

k otočení, ovšem jedna z nich, otočení rohové čtveřice 3, 4, 7 a 8, by otočila rohový žeton 4 opět načerno (a otáčet tu samou rohovou čtveřici dvakrát je jako neotočit ji ani jednou). Proto zvolíme jedinou zbývající možnou čtveřici, a to 2, 3, 6 a 7, viz obrázek 12.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 11

Obrátit žeton 8 lze také dvěma způsoby, ale obdobně je jedním z těchto způsobů otočení rohové čtveřice. Proto zvolíme jedinou alternativní variantu, otočení žetonů 7, 8, 11 a 12, viz obrázek 13.

U žetonů 9 a 14 se jedná o stejnou situaci. Jedna ze dvou možností, kterou u obou žetonů máme, je druhé otočení rohové čtveřice, která by otočila načerno žeton 13. Proto v jednom kroku otočíme žetony 5, 6, 9 a 10, viz obrázek 14.

A ve druhém otočíme žetony 10, 11, 14 a 15, viz obrázek 15.

Tímto jsme dosáhli šachovnicového rozložení. Jelikož jsme zdůvodnili, proč je každý ze šesti kroků, které jsme ukázali, nezbytný, zároveň jsme ukázali, že

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 13

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 14

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Obr. 15

konečného stavu nelze dosáhnout v méně krocích.

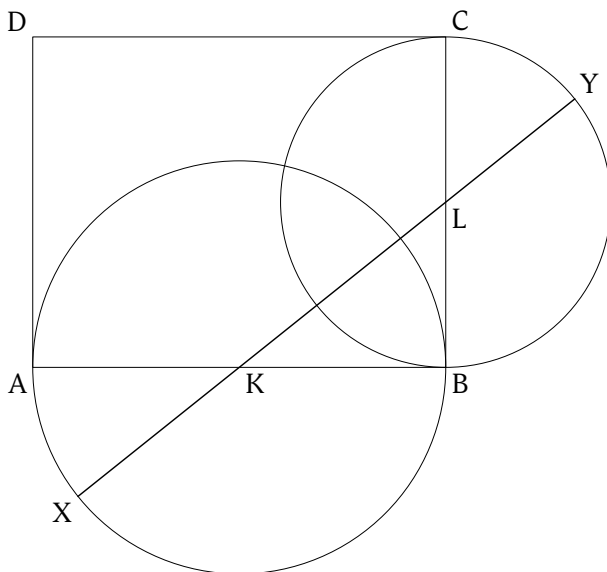
Komentář: Naprostá většina řešitelů došla ke správnému řešení, někteří dokonce správně napsali např. že na pořadí kroků nezáleží. U některých jsme však bohužel museli strhnout body za to, že chybělo zdůvodnění, proč nelze použít méně než šest kroků.

Úloha č. 5

Ve skále je vytesán obdélník ABCD, $|AB| = 10$, $|BC| = 8$, střed strany AB je označen K, střed strany BC je označen L. Dále je ve skále vytesaná kružnice k se středem v bodě K a poloměrem $|KB|$ a také kružnice l se středem v bodě L a poloměrem $|LB|$. Určete nejdelší možnou délku úsečky XY, kde X leží na k a Y leží na l. Také zdůvodněte, proč neexistuje žádná delší.

Řešení: Uvažme obrázek 16. Nejprve nás určitě napadne, že výsledek budou

průsečíky kružnic a přímky KL, nicméně abychom dokázali, že je doopravdy nejdelší, tak se pokusíme nalézt řešení, kde body nebudou takto uspořádány: Uvažujme uzavřenou lomenou čáru XKLYX.



Obr. 16

Rádi bychom na ni aplikovali trojúhelníkovou nerovnost a proto ji rozdělíme na 2 části, a to trojúhelníky XKL a XLY. Pro ně platí $|XL| < |XK| + |KL|$ a $|XY| < |XL| + |LY|$. Za $|XL|$ v druhé nerovnici dosadíme první nerovnici:

$$|XY| < |XK| + |KL| + |LY|.$$

Můžeme si všimnout, že toto řešení musí být menší, nežli to, které leží na jedné přímce. To znamená, že právě to musí být to nejdelší.

Zbývá nám ještě vypočítat, jak dlouhá je tedy tato přímka. Zde nám opět pomůže si ji rozdělit na části XK, KL a LY. XK je poloměrem kružnice k , tedy má délku $|KB| = \frac{1}{2}|AB| = 5$. Obdobně LY je poloměrem l a $|LB| = \frac{1}{2}|CB| = 4$. Pro KL si všimneme trojúhelníku KBL. U bodu B je pravý úhel a můžeme na něj aplikovat Pythagorovu větu:

$$|KL| = \sqrt{|KB|^2 + |BL|^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

Součet délek všech částí a tedy i řešení je $5 + 4 + \sqrt{41} = 9 + \sqrt{41}$.

Komentář: Nejvíce bodů bylo strženo za nedostatečný důkaz. Formulovat matematický důkaz správně je těžké a řešitelům, kterým se nepovedl, doporučuji poslechnout si o tom přednášku na jedné z našich akcí anebo si vyhledat termín „Matematické důkazy“. Nicméně ceníme si pokusů i o neformální anebo alespoň částečné důkazy.

Úloha č. 6

Na čtverečkové tabulce 10×10 hraje hru Altirhinus s Velafronsem. Strídají se v tazích, Altirhinus začíná. V každém tahu do nějakého prázdného políčka hráč umístí svůj tvar; Altirhinus má křížek a Velafrons kolečko. Altirhinovým cílem je vytvořit čtverec 2×2 složený ze čtyř křížků. Velafronsovým cílem je pouze tomu zabránit, tedy zaplnit celou tabulku, aniž by se tam vyskytl čtverec 2×2 ze čtyř křížků. Kdo vyhraje? Dobře popište vyhrávající strategii a zdůvodněte, proč je vyhrávající.

Řešení: Vítěznou strategii má Velafrons. Abychom to ukázali, nejdříve rozdělíme hrací plán na jednotlivé řádky (každý má 10 polí) a podíváme se, jak hra probíhá na jednom řádku. Intuitivně usoudíme, že Altirhinus získá jakousi výhodu, pokud se mu povede vytvořit souvislou řadu několika křížků. Velafrons se přirozeně snaží této výhodě zabránit a tak nakreslí kolečko hned vedle naposledy přidaného křížku. Velafrons má ale dvě možnosti, kam kolečko umístit, a pokud mezi nimi bude volit bez rozmyslu, Altirhinus jej snadno přelstí:

				x	o				
--	--	--	--	---	---	--	--	--	--

	o	x		x	o				
--	---	---	--	---	---	--	--	--	--

	o	x	x	x	o				
--	---	---	---	---	---	--	--	--	--

Proto se Velafrons bude řídit určitým pravidlem: když Altirhinus položí křížek na políčko v sudém sloupci, přidá Velafrons kolečko vpravo od něj; když na políčko v lichém sloupci, tak vlevo od něj. Pokud takové políčko neexistuje (Altirhinus přidal křížek na začátek nebo konec řádku), může Velafrons hrát kamkoli podle libosti (to jeho strategii nezhorší, kolečka Velafronsovi náhodně v tabulce jediné prospějí). Je důležité si uvědomit, že Velafrons se touto strategií může řídit kdykoli a Altirhinus jej nemůže zablokovat. Kdyby například Altirhinus hrál na 4. políčko poté, co již obsadil 5. políčko křížkem a chtěl tak narušit Velafron-

sovu strategii (která mu velí hrát na 5. políčko), Velafrons už v předchozím tahu obsadil místo nalevo od 5., tedy 4. políčko.

I když Velafrons používá takovouto strategii, Altirhinus může stále vytvářet dvojice křížků vedle sebe:

			x	o					
--	--	--	---	---	--	--	--	--	--

	o	x	x	o					
--	---	---	---	---	--	--	--	--	--

Delší řady křížků ale vytvořit nedovede, protože ke každému křížku (který není na konci řádku) položil Velafrons kolečko hned vedle. Navíc každá dvojice křížků, kterou Altirhinus vytvoří, začíná na sudém políčku, protože napravo od každého křížku na lichém políčku je buďto kolečko, nebo konec řádku. I s takovou Velafronsovou strategií Altirhinus hravě zvítězí, jako třeba tady:

	o	x	x	o					
	o	x	x	o					

Proto Velafrons provede ve strategii ještě jednu změnu: položí-li Altirhinus křížek na sudý řádek, řídí se Velafrons původní strategií; pokud na lichý řádek, Velafrons strategii otočí: je-li nový křížek v sudém sloupci, položí kolečko nalevo od něj, je-li křížek v lichém sloupci, položí kolečko napravo od něj. Tak každá dvojice křížků, kterou Altirhinus vytvoří na lichém řádku, začíná na lichém políčku. Altirhinus se ale snaží vytvořit čtverec 2×2 , tedy dvě dvojice křížků na sousedních řádcích, které začínají ve stejném sloupci. To se mu ale nikdy nepovede, jeho pokusy vždycky skončí podobně jako tento:

	o	x	x	o					
		o	x	x	o				
	o	x	x	o					

Celá Velafronsova strategie tedy vypadá takto:

- Pokud Altirhinus položil křížek do lichého sloupce lichého řádku nebo do sudého sloupce sudého řádku, polož kolečko napravo od něj.
- Pokud Altirhinus položil křížek do sudého sloupce lichého řádku nebo do lichého sloupce sudého řádku, polož kolečko nalevo od něj.
- Pokud je takový tah nemožný (nový křížek je na kraji řádku a musel bys hrát mimo herní plán), hraj libovolně.

Komentář: Úloha se bohužel nikomu nepovedla vyřešit úplně. Nejčastějším

opomenutím byl předpoklad, že se Altirhinus řídí nějakou konkrétní strategií a vypracovali strategii pouze proti této konkrétní Altirhinově strategii. Velofronsova strategie by ale měla fungovat, i kdyby Altirhinus hrál třeba úplně náhodně. Dále jsem se často setkal s vágním popisem, že Velofrons má položit kolečko hned vedle Altirhinova křížku. To ale (v závislosti na herní situaci) lze udělat více způsoby, které mohou vést až k různým výsledkům hry. Proto je důležité strategii popsat tak, aby vyhrál i náhodný kolemjdoucí, který nezná cíl hry a jen se řídí vaším návodem.

Úloha č. 7

Talarurus má 28 zelených osteodermů (kostěné plátovité výrůstky z kůže) a pinacosaurus má 20 červených osteodermů (tyto počty neodpovídají historickým skutečnostem). Na paloučku se potkalo několik talarurů s několika pinacosauri. Určete všechny možnosti, kolik se na paloučku mohlo potkat kterých dinosaurů, pokud se celkový počet zelených osteodermů rovnal celkovému počtu červených osteodermů. Výsledek zdůvodněte.

Řešení: Označíme-li si počet talarurů jako x a počet pinacosaurů jako y , můžeme jednoduše sestavit rovnici, která má platit:

$$28x = 20y$$

$$28x - 20y = 0$$

Rovnici jsme si upravili do tvaru $ax + by = 0$, a můžeme tak rovnou použít vzorce, které jsme se naučili v povídání o diofantických rovnicích:

$$x = \frac{-kb}{\text{nsd}(a, b)}, \quad y = \frac{ka}{\text{nsd}(a, b)},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ (celé číslo) je libovolné. V našem případě víme, že $a = 28$ a $b = -20$. Při hledání největšího společného dělitele budeme záporné znaménko u b ignorovat a vyjde nám, že $\text{nsd}(28, 20) = 4$. Můžeme dosadit do vzorců a upravovat, dokud řešení nebudeme mít ve tvaru $n \times k$ (kde n je nějaké číslo):

$$x = \frac{-k \cdot (-20)}{4} = \frac{-(-20)}{4}k = 5k,$$

$$y = \frac{k \cdot 28}{4} = \frac{28}{4}k = 7k.$$

Našli jsme tedy nekonečně mnoho řešení. V případě naší úlohy musíme dát pozor ještě na to, že počet dinosaurů nemůže být záporný – za k tedy můžeme

dosazovat pouze nezáporná čísla, tedy $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Pokud za k dosadíme například 1, vidíme, že by talarurů bylo právě 5 a pinacosaurů 7.

Komentář: Většina řešitelů úlohu zvládla vyřešit, nicméně body jsme strhávali za nepřesnou definici množiny, ze které je k . Řešitelé si mohli vybrat, zda do této množiny zahrnout i nulu nebo ne, jelikož zadání z tohoto pohledu nebylo jednoznačné.

Úlohy čtvrté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Jan Škopek, 2. Luisa Troupová, 3. Lukáš Koucký, 4. Sára Šamánková, 5. Vítek Kaděra, 6. Matouš Cimala, 7. Adam Dřínek

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 4. sérii

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
1.-2.	1.	Miroslav Hrinko	8. GCDP	5	5	5	5	5	-	5	-	30	120
	1.	Jan Němeček	9. NPRG	5	5	5	5	5	3	5	-	30	120
3.	2.	Dan Školař	9. ZSBR	5	5	5	4	5	-	5	-	29	118
4.	2.	Tomáš Kvapil	8. PORG	5	5	5	3	4	-	5	-	27	116
5.-6.	3.-4.	Matěj Krivánek	9. GMBU	5	5	3	4	4	3	4	-	25	115
		Tyge Matthews	9. GNSP	5	5	-	5	5	3	5	-	28	115
7.	5.	Martin Dostál	9. GCHO	3	5	4	-	5	3	5	-	25	111
8.-9.	6.-7.	Alžběta Reitmayerová	9. GSPP	5	5	2	5	4	3	-	-	24	110
		Robin Tesař	9. GCDP	4	5	5	5	4	-	5	-	28	110
10.	8.	Noel Probst	9. PORG	5	5	3	3	4	3	5	-	25	109
11.	1.	David Kabelka	7. NPRG	-	-	5	3	4	-	5	-	17	105
12.	9.	Jiří Grepl	9. ZGUP	-	3	3	3	4	-	4	-	17	104
13.	3.	Vít Lukavský	8. ZMNK	5	5	5	5	3	-	4	-	27	100
14.	2.	Petr Kysela	7. GCKR	3	3	2	3	3	3	4	-	19	98
15.-16.	3.	Adam Urx	7. PORG	-	1	1	1	4	2	4	-	13	96
	10.	Pavčina Petrželová	9. GJKP	2	1	5	-	4	2	5	-	19	96
17.	1.	Jakub Zelenka	6. GRIC	1	5	4	3	3	2	4	-	21	95
18.-19.	4.	Lukáš Kopecký	8. GAJL	5	5	5	3	5	-	5	-	28	88
	11.	Lukas Stanovsky	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	88
20.-21.	5.-6.	Stanislav Beneš	8. GJNP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	87
		Eva-Margarita Migel	8. GNAP	3	3	2	2	3	2	3	-	16	87
22.	7.	Metodej Samal	8. ZKVL	5	5	5	5	5	-	4	-	29	84
23.	4.	Agnes Dostálová	7. GMNP	4	5	3	4	4	-	4	-	24	79
24.-26.	5.-6.	Magdaléna Pelikánová	7. GBUP	4	5	5	5	5	-	4	-	28	78
		Alžběta Pelikánová	7. GBUP	5	5	-	5	4	-	4	-	23	78
	12.	Jitka Stejskalová	9. ZNDC	1	1	2	2	3	2	3	-	13	78
27.	2.	Antonín Červený	6. GCDP	3	4	3	3	2	-	4	-	19	75
28.-29.	3.	Maxmilian Čovan	6. GJKP	4	-	2	-	-	-	4	-	10	73
	13.	Matěj Kubín	9. GLIP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	73
30.	7.	Ján Minárik	7. GABP	5	5	-	-	3	-	-	-	13	70
31.	8.	Veronika Loudová	7. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	69
32.	8.	Matěj Matyáška	8. ZKON	-	-	2	2	2	2	3	-	11	68
33.	9.	Martina Vojteková	7. PORG	-	-	-	-	-	-	4	-	4	67
34.-35.	10.	Adéla Manová	7. GLPP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	64
	14.	Josefina Svatušková	9. PORG	1	3	3	-	4	3	2	-	16	64
36.	9.	Sofie Kaucká	8. GOPG	4	-	1	-	4	-	5	-	14	63
37.	4.	Matias Eisner	6. ZLTP	-	-	-	-	2	-	3	-	5	62

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	1	2	3	4	5	6	7	P	σ	Σ
38.	10.	Jiří Mlynář	8. PORG	-	-	-	-	-	-	3	-	3	61
39.	15.	Matyáš Hazdra	9. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	60
40.	11.	Karel Olšar	7. GCKR	-	4	-	-	3	-	4	-	11	59
41.	11.	Jakub Hrabálek	8. ZSJN	3	-	4	-	-	-	5	-	12	54
42.	16.	Mariana Warausová	9. GKSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	53
43.	12.	Lada Karásková	7. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	50
44.-46.	13.-15.	Adam Donát	7. GCDP	-	-	1	3	-	-	4	-	8	48
		Vlastimil Straka	7. ZTRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	48
		Bedřich Škop	7. GMSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	48
47.-48.	12.	Radka Valkovičová	8. ZOKZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	47
	17.	Gleb Baulin	9. GPKV	-	3	2	1	2	2	4	-	14	47
49.-50.	13.	Matěj Kiapeš	8. ZKON	-	-	1	3	4	-	4	-	12	44
	18.	Šimon Pelák	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	44
51.	1.	Marek Houfek	5. ZCHP	4	-	-	3	-	-	-	-	7	41
52.	19.	Jana Malkovská	9. ZGUP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	39
53.	14.	Roman Chasovskikh	8. GKMP	-	-	-	-	4	2	4	-	10	38
54.	20.	Marek Nechvátal	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	36
55.-56.	16.	Hana Korejsová	7. ZPSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	35
	21.	Vojtěch Kadlec	9. PORG	3	5	5	4	4	-	4	-	25	35
57.-58.	5.	Dominik Holtan	6. GMSP	3	-	-	-	-	-	5	-	8	34
	22.	Kateřina Tesař	9. NPRG	-	-	-	-	4	-	4	-	8	34
59.	17.	Jaroslav Posch	7. GMKR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	31
60.	18.	Pavčina Břizová	7. GTNV	-	-	-	-	-	-	-	-	0	30
61.	23.	Viola Filipová	9. GJKP	5	5	5	4	5	4	5	-	29	29
62.	15.	Jan Foldyna	8. ZAJP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	28
63.	6.	Jonas Koucky	6. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	27
64.-66.	7.	Patrik Nedvěd	6. ZSTD	-	-	-	-	-	-	-	-	0	25
	19.-20.	Vojtěch Bárta	7. GLIP	-	5	-	-	2	-	-	-	7	25
		Emma Tereza Collis	7. GMSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	25
67.-68.	21.	Adam Kozák	7. ZTRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
	16.	Mikuláš Krubner	8. GBEN	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
69.	24.	Tomáš Blahout	9. GCHE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	23
70.	17.	Nikolas Doležal	8. ZKYS	-	-	-	-	-	-	-	-	0	22
71.-72.	8.	Čestmír Hlaváček	6. GABP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21
	18.	Karel Kanický	8. ZKYS	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21
73.-74.	19.	Jan Daniel Elleder	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
	25.	Matěj Pavlok	9. ZERM	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
75.-76.	9.	Karolína Tarant	6. NPRG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
	20.	Adéla Šukeníková	8. ZLJN	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
77.-78.	10.	Victoria Bartůňková	6. ZMAC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
	21.	Petr M. Grametbauer	8. ZLOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
79.	22.	Vojtěch Pešl	7. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
80.-86.	23.	Richard Bechera	7. GRIC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	22.-23.	Kristian Poljak	8. GPRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	σ	Σ
80.–86.	22.–23.	Dorota Slamková	8. GOHR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Barbora Bouchnerová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	26.–29.	Františka Cindrová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Jakub Pešl	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Jan Rosík	9. ZSPP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
87.	24.	Matteo Dalrymple	8. ZSBR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
88.	24.	Robert Faltys	7. ZLUZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11
89.	2.	Anna Menšíková	5. ZBJP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
90.–91.	25.	Olda KOZMON	7. GPRE	1	3	2	3	-	-	-	-	9	9
	25.	Lenka Pulkrábková	8. ZBOB	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
92.–93.	30.–31.	Jonáš Dinga	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
		Václav Vokůrka	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
94.	11.	Viktoriia Anisimová	6. ZLUZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
95.	26.	Sebastian Mlích	8. GMOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3
96.	27.	Marie Hošková	8. GABP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2
97.–98.	32.	Elena Šlaisová	9. ZMEC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1