

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítejte s námi v roce 2025! Ve čtvrtém letáku letošního ročníku Pikomatu na vás čekají výsledky a vzorová řešení druhé série, druhé Průvodní povídání a zadání čtvrté série. Tu nám můžete posílat až do 10. února a i její výsledky mohou rozhodnout o účasti na jarním soustředění.

Víkendovky a Pikoúterý

I v novém roce pro vás máme kromě matematických úloh připraveno spoustu dalšího zajímavého programu. Už o víkendu 24.–26. ledna se můžete těšit na další víkendovku. Ta proběhne ve skautské klubovně Kulatá Bába v Kladně a můžete se opět těšit na matematické přednášky a zajímavé hry. Každé úterý večer se v karlínské budově Matfyzu koná Pikoúterý, setkání řešitelů s organizátory.

Soustředění a tábor

Pomalu se blíží také jarní soustředění, kam zveme nejúspěšnější řešitele prvních čtyř sérií a které se uskuteční 2.–9. dubna. Do kalendáře si také запиšte termín našeho letního tábora (26. 7. – 9. 8. v Bratrouchově u Jablonce nad Jizerou). Pro účast nemusíte být na špici výsledkové listiny, stačí pokud máte rádi matematiku, hry a legraci a přihlásíte se pomocí účastnického účtu na našem webu. Přihlašování bude spuštěno na začátku února.

Soutěž DuoGeo

Pokud vás zajímá geometrie a rádi soutěžíte, mohla by vás zaujmout nová soutěž dvojic DuoGeo. Její první ročník vypukne 9. února v Praze a Bratislavě a nabídne dvě soutěžní kategorie – pro základní a střední školy. Více informací včetně přihlašovacího formuláře najdete na stránkách duogeo.cz.

Sociální síť

Nezapomeňte také sledovat naše webové stránky a navštivte také náš Instagram. Případné dotazy pak směrujte na náš e-mail pikomat@mff.cuni.cz.

Hodně štěstí a úspěchů (nejen) při řešení dalších sérií vám přejí

Vaši organizátoři

Zadání úloh 4. série 40. ročníku

Termín odeslání: 10. února 2025

Ve filmu Jurský park z roku 1993 je pouze 15 minut s dinosaury.

Úloha č. 1: *V řadě na kamennou polévku stojí nekonečno dinosaurů. Každý dinosaurus buď polévku dostane, nebo ne. Dinosaurus, co polévku rozdává, řekl, že polévku dostane právě jeden z prvních dvou dinosaurů v řadě. První dinosaurus v řadě řekl, že polévku dostane právě jeden ze tří dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Druhý dinosaurus řekl, že polévku dostane právě jeden ze čtyř dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Třetí dinosaurus řekl, že polévku dostane právě jeden ze dvou dinosaurů, co stojí v řadě za ním. Výroky dinosaurů se takto opakují, tedy čtvrtý hovoří o třech dinosaurech za ním, pátý o čtyřech, šestý o dvou, ... Určete, jestli polévku dostane 99. dinosaurus v řadě. Odpověď zdůvodněte.*

Dinosauri žili na všech kontinentech, včetně Antarktidy.

Úloha č. 2: *Troodon má hromádku standardních kostek. O standardní kostce vždy platí, že součet teček na protějších stěnách je 7. Postavil jednu věž ze všech kostek hromádky a kostky hezky srovnal, aby vznikl vysoký kvádr (dal je na sebe libovolně, nic po tečkách na sousedících stěnách nevyžadoval). Zjistil, že součet teček na každé ze 4 bočních stěn věže je sudý. Určete všechny možnosti, pro kolik kostek v hromádce se to mohlo stát. U těchto možností ukažte, že to opravdu jde. U ostatních možností zdůvodněte, proč to nemůže jít.*

Největší dinosaurí vejce byly velké jako basketbalový míč.

Úloha č. 3: *Ouranosaurus má krychli velikosti $3 \times 3 \times 3$, kterou chce rozřezat na 27 krychlíček s hranou 1. Vždy po říznutí může vzniklé útvary na stole přeskládat, takže třeba budou čtyři za sebou. Při následujícím říznutí všechny díly rozřízne, tedy třeba rozřízne ty čtyři díly zároveň. Kolikrát nejméně musí ouranosaurus říznout? Ukažte, jak by takové řezání probíhalo, a zdůvodněte, proč méně říznutí nevystačí.*

Žádný dinosaurus v délce nepřesahoval plejtváka obrovského o největší potvrzené délce 30 metrů.

Úloha č. 4: *Plejtvák má tabulku 4×4 , v každém políčku je jeden žeton. Žeton je zeshora černý, zespoda bílý. V jednom tahu vybere část tabulky o velikosti 2×2 a každý žeton v této oblasti převrátí. Kolik nejméně tahů plejtvák potřebuje,*

aby žetony celé tabulky tvořily šachovnicové obarvení? Ukažte, jaké tahy použít, a zdůvodněte, proč méně tahů nestačí.

Při vyhynutí dinosaurů vyhynulo asi 70 % živočišné populace Země.

Úloha č. 5: Ve skále je vytesán obdélník $ABCD$, $|AB| = 10$, $|BC| = 8$, střed strany AB je označen K , střed strany BC je označen L . Dále je ve skále vytesaná kružnice k se středem v bodě K a poloměrem $|KB|$ a také kružnice l se středem v bodě L a poloměrem $|LB|$. Určete nejdelší možnou délku úsečky XY , kde X leží na k a Y leží na l . Také zdůvodněte, proč neexistuje žádná delší.

První dinosauri se pravděpodobně vyvinuli na pevninách jižního superkontinentu Gondwany, jedná se o jih dnešní Jižní Ameriky.

Úloha č. 6: Na čtverečkové tabulce 10×10 hraje hru Altirhinus s Velafronsem. Střídají se v tazích, Altirhinus začíná. V každém tahu do nějakého prázdného políčka hráč umístí svůj tvar, Altirhinus má křížek a Velafrons kolečko. Altirhinovým cílem je vytvořit čtverec 2×2 složený ze čtyř křížků. Velafronsovým cílem je pouze tomu zabránit, tedy zaplnit celou tabulku, aniž by se tam vyskytl čtverec 2×2 ze čtyř křížků. Kdo vyhraje? Dobře popište vyhrávající strategii a zdůvodněte, proč je vyhrávající.

První pojmenovaný dinosaur je Megalosaurus, tedy velký ještěr. Fosilie našel a pojmenoval britský vědec William Buckland roku 1824.

Úloha č. 7: Talarurus má 28 zelených osteodermů (kostěné plátovité výrůstky z kůže) a pinacosaurus má 20 červených osteodermů (tyto počty neodpovídají historickým skutečnostem). Na paloučku se potkalo několik talarurů s několika pinacosaury. Určete všechny možnosti, kolik se na paloučku mohlo potkat kterých dinosaurů, pokud se celkový počet zelených osteodermů rovnal celkovému počtu červených osteodermů. Výsledek zdůvodněte.

K vyřešení této úlohy se může hodit letošní Průvodní povídání o diofantických rovnicích.

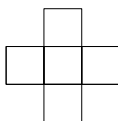
Vzorová řešení a komentáře k 2. sérii úloh

Úloha č. 1

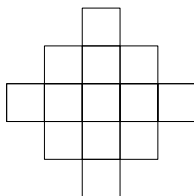
Ankylosaurus měl na zádech jeden kámen tvaru čtverce. Po prvním roce už měl na zádech 5 kamenů, po druhém roce 13 kamenů. Postupně rostly jako na obrázcích 1, 2, 3, 4. Určete, kolik kamenů měl ankylosaurus na zádech po stém roce.



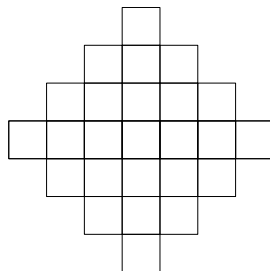
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Řešení: Všimněme si, že tvar kamínků, který má ankylosaurus na zádech po x -tém roce, je vlastně pootočená tabulka. Obarvěme tuto tabulku jako šachovnici (dvoubarevně tak, aby políčka sousedící stranou měla různé barvy) a uvažujme zvláště bílá a černá políčka. Bez újmy na obecnosti řekněme, že úplně horní políčko je černé. Nyní vidíme, že středy černých políček tvoří pootočenou tabulku $(x+1)(x+1)$. Podobně středy bílých políček tvoří mřížku $x \cdot x$, z čehož už umíme velice snadno spočítat, že po x -tém roce je v celé tabulce (takže i na dinosaurích zádech) celkově $(x+1)^2 + x^2$ kamínků.

$$0. \text{ rok} = 1^2 + 0^2 = 1,$$

$$1. \text{ rok} = 2^2 + 1^2 = 5,$$

$$2. \text{ rok} = 3^2 + 2^2 = 13,$$

$$\vdots$$

$$100. \text{ rok} = 101^2 + 100^2 = 20\,201.$$

Takto snadno vypočítáme, že po 100. roce ankylosaurus ponese na zádech 20 201 kamínků.

Komentář: Ukázalo se, že jde správný výsledek spočítat hned několika způsoby, ať už tím popsaným ve vzoráku, jiným rozdělením tabulky, nebo sečtením geometrické řady (vzhledem k přibývajícím kamínkům). Častou chybkou bylo, že řešitel vypočítal, kolik kamínků ankylosaurus bude mít na zádech BĚHEM 100. roku, úloha se ale ptala, kolik jich bude mít PO něm.

Úloha č. 2

Stegosaurus si myslí číslo. Prozradil, že se jedná o největší celočíselný násobek čísla 9 takový, že žádné dvě cifry nejsou stejné a že všechny cifry jsou sudé. Zjistěte, jaké číslo si stegosaurus myslí.

Řešení: Pokud je stegosauovo číslo dělitelné devíti, musí být devíti dělitelný i jeho ciferný součet.

Víme, že cifry stegosauova čísla jsou sudé, přičemž žádná cifra se neopakuje. V ciferném zápise se tedy mohou vyskytnout jen čísla 0, 2, 4, 6, 8 (ne nutně všechna a ne nutně v tomto pořadí).

Abychom našli co největší číslo, chceme využít co nejvíce cifer. Naše číslo může tedy být nejvíce pěticiferné a to v případě, kdy využijeme všechna sudá čísla. Podívejme se na ciferný součet takového čísla: $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$. Vzhledem k tomu, že 20 není dělitelné devíti, nemůže být devíti dělitelné ani naše číslo. Zkusme tedy najít číslo čtyřciferné. Pokud chceme najít to největší, chceme odebrat nejmenší možnou cifru. Odebráním 0 ciferný součet nezměníme. Odebráním čísla 2 dostáváme ciferný součet 18, $(0 + 4 + 6 + 8)$. Číslo 18 už dělitelné devíti je.

Všechna čísla tvořená čtveřicí čísel 0, 4, 6, 8 tedy budou dělitelná devíti. Pro nalezení největšího chceme vždy dostat nejvyšší možnou cifru na nejvyšší možný řád (čísla seřadíme sestupně). Nejvyšší možné číslo, které si stegosaurus mohl myslet, tedy je 8640.

Komentář: Většina došlých řešení postupovala jako v tom vzorovém a většina řešitelů si tedy s úlohou zdárně poradila.

Úloha č. 3

Argentinosaurus si do písku napsal čísla 1, 2, 3, ..., 20. Pak vždy dvě vybral, označme je x a y , smazal je a do písku zpátky napsal číslo $x + y - 1$. Takto pokračoval,

až mu v písku zbylo jen jedno číslo. Určete všechna možná čísla, která mu mohla zbýt.

Řešení: Jediná možná operace s čísly, kterou zadání dovoluje, je sečíst dvě vybraná čísla a odečíst od nich jedna. Vždy, když tuto operaci provedeme, se daná dvě čísla smažou a objeví se jedno nové, takže tuto operaci můžeme provést pouze devatenáctkrát, než nám zbude pouze jedno číslo. Každé z původních čísel tedy použijeme pouze jednou a výsledné číslo bude součtem všech čísel původních, od kterého odečteme 19 (protože operaci ze zadání provedeme devatenáctkrát). Jediné možné číslo, které mohl argentinosauros na konci mít, je tedy $1 + 2 + 3 + \dots + 20 - 19 = 191$.

Komentář: Většina řešitelů postupovala stejně nebo podobně jako ve vzorovém řešení a tedy si většina řešitelů s úlohou správně poradila.

Úloha č. 4

Sarahaosaurus Sára a sarahaosaurus Mára proti sobě hrají hru. Mají tabulku 8×8 , v pravém horním rohu je figurka tyranosaura Báry. Sára a Mára se střídají v tazích, Sára začíná. V jednom tahu hráč posune Báru o jedno pole dolů, nebo o jedno pole doleva, nebo o jedno pole šikmo doleva dolů. Kdo posune Báru na rohové pole vlevo dole, vyhraje. Určete, jestli má výherní strategii Mára nebo Sára a dobře ji popište.

Řešení: Všimněme si, že Bára nikdy nenavštíví nějaké pole podruhé, protože se vždy může pohnout jen na pole, která jsou blíže rohovému poli vlevo dole. A protože se Bára každý Sárin a Mářův tah pohne, tak hra určitě někdy skončí. Popíšeme výherní strategii, kterou má Sára. V jejím prvním tahu se pohne šikmo doleva dolů. Nyní se Bára nachází na poli v lichém řádku a sloupci (lichém od rohového pole vlevo dole), proto Mára v jeho tahu dostane Báru buď do sudého sloupce (posun doleva), nebo do sudého řádku (posun dolů), nebo do sudého sloupce a řádku (šikmý pohyb). Sára nyní posune Báru tak, aby ležela opět v lichém sloupci a řádku. Není těžké si domyslet, že Sára toto vždy udělat může (protože postranní sloupec a řádek blíže rohovému poli vlevo dole jsou liché, tak Bára nikdy nepůjde mimo tabulku). Nyní je ale opět na řadě Mára a nachází se ve stejné situaci. Hra takto tedy může pokračovat dále. Protože ale rohové pole vlevo dole je v lichém sloupci a řádku, tak to musí být Sára, která udělá poslední tah a také tedy vyhraje.

Pro variantu za 3 body je strategie téměř stejná, jen jelikož Bára začíná už v lichém sloupci a řádku, tak nyní má stejnou výherní strategii Mára a ne Sára.

Komentář: Velká většina řešitelů se vydala jednou ze dvou cest – značením políček, z kterých hráč na tahu vyhraje, nebo prohraje, a popsání samotné kopírovací strategie. Oběma způsoby lze také jednoduše ukázat (pomocí druhého způsobu může být důkaz trochu případový), že výherní strategie je jen jedna.

Úloha č. 5

Čísla x a y jsou přirozená. Víme, že $3 \mid x + y$ a že $3 \mid x - y$. Rozhodni, jestli z toho pak nutně plyne, že $9 \mid x^2 + y^2$.

Řešení:

$x + y$ můžeme zapsat jako $3 \cdot k$. Podobně $x - y$ můžeme zapsat jako $3 \cdot l$. Pokud oba výrazy sečteme, zjistíme, že $(x + y) + (x - y) = (3 \cdot k) + (3 \cdot l) = 3 \cdot (k + l)$. To znamená, že $(x + y) + (x - y) = 2x$ je dělitelné třemi. Jelikož 2 a 3 jsou nesoudělná, i $\frac{2x}{2} = x$ je dělitelné třemi. Můžeme proto zapsat, že $x + y = 3 \cdot k$ a $x = 3 \cdot m$. Potom $y = (x + y) - x = (3 \cdot k) - (3 \cdot m) = 3 \cdot (k - m)$. Tedy i y je dělitelné třemi.

Čísla, která jsou dělitelná třemi, mají ve svém prvočíselném rozkladu alespoň jednu trojku. Pokud číslo umocníme na druhou, umocníme zároveň všechny členy jeho prvočíselného rozkladu na druhou. Pokud např. $A = (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots)$, potom $A^2 = (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots) \cdot (a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots) = (a^{2x} \cdot b^{2y} \cdot c^{2z} \dots)$. Jelikož x i y mají ve svém prvočíselném rozkladu alespoň jednu trojku, x^2 i y^2 budou mít ve svém prvočíselném rozkladu 3^2 , tedy 9. Proto budou dělitelná devíti. Pokud můžeme říci, že $x^2 = 9 \cdot n$ a $y^2 = 9 \cdot o$, $x^2 + y^2 = 9 \cdot n + 9 \cdot o = 9 \cdot (n + o)$. Výraz $x^2 + y^2$ proto vždycky bude dělitelný devíti.

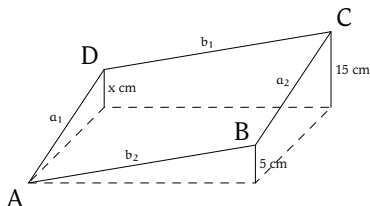
Komentář: Spousta řešitelů úlohu řešila za pomoci modula, ačkoliv ne všichni při tomto způsobu řešení vzali v potaz všechny případy. Objevilo se také pár elegantních řešení, která využívala rozklady na součin. Obecně nejrozšířenějším neduhem bylo nedostatečné vysvětlení některých tvrzení, například proč $3 \mid x$ a $3 \mid y$.

Úloha č. 6

Therizinosaurus našel zvláštní obdélníkový stůl. Šel tedy kolem stolu a postupně měřil délky jeho noh. První noha měřila 90 cm, druhá 95 cm, třetí 105 cm a čtvrtá chyběla. Spočítejte, kolik by měla měřit ta čtvrtá noha, aby se pak všechny nohy dotýkaly země.

Řešení:

Označme si nohy stolu v místě, kde se dotýkají desky stolu, jako body A, B, C a D. Aby se nohy dotýkaly země, musí tyto body ležet v jedné rovině. Situaci si můžeme znázornit jako na obrázku 5 – pro zjednodušení jsme od všech délek nohou odečetli délku nejkratší nohy $|A| = 90\text{cm}$.



Obr. 5

Jak můžeme vidět, tak strany a_1 a a_2 a také strany b_1 a b_2 musí být rovnoběžné. Toho docílíme tak, že rozdíl délky nohou $|B| - |A| = 5\text{ cm}$ a $|C| - |B| = 10\text{ cm}$ budeme symetricky aplikovat i na nohu D.

Dostáváme tedy: $|C| - |D| = 5\text{ cm}$ a $|D| - |A| = 10\text{ cm}$, z čehož už je jasné, že $|D| = 95\text{ cm} + 5\text{ cm} = 90\text{ cm} + 10\text{ cm} = 100\text{ cm}$.

Komentář: Téměř všichni řešitelé našli správné řešení a zvládli ho i správně odůvodnit. Úloha byla zadána tak, aby řešení šlo najít logickým odvozením a nebylo třeba používat matematické věty z oboru analytické geometrie, které řešitelé neznají.

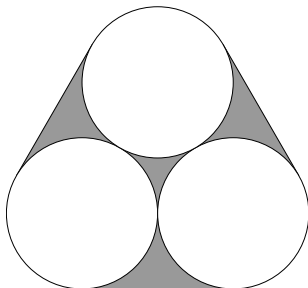
Úloha č. 7

Ve skále byl vytesán obrazec 6. Určete plochu šedé oblasti, pokud každý kruh měl poloměr 1 cm.

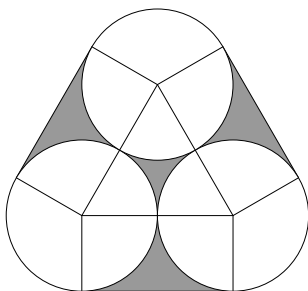
Řešení: Celý útvar si můžeme pomocí středů jednotlivých kruhů rozdělit na 3 obdélníky, rovnostranný trojúhelník a tři části kruhu jako na obrázku.

Všimněme si, že každá z částí kruhu je třetinou kruhu, neboť jde o kruhovou výseč a úhel u středu je $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$. Dohromady mají tedy tyto tři části kruhu stejný obsah jako jeden kruh o poloměru 1 cm, jeho obsah je tedy $\pi\text{ cm}^2$.

Jelikož kruhy mají poloměr 1 cm, měří strany obdélníku 2 cm. Obsah jednoho obdélníku je tedy $1\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 2\text{ cm}^2$. Strana rovnostranného trojúhelníku měří také 2 cm. Protože se jedná o rovnostranný trojúhelník, jeho výška splývá s těž-



Obr. 6



Obr. 7

nicí a z Pythagorovy věty má tedy délku $\sqrt{(2 \text{ cm})^2 - \left(\frac{2 \text{ cm}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ cm}$. A obsah trojúhelníku je tedy $\frac{2 \text{ cm} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Obsah celého útvaru je potom $3 \cdot 2 \text{ cm}^2 + \sqrt{3} \text{ cm}^2 + \pi \text{ cm}^2 = (6 + \sqrt{3} + \pi) \text{ cm}^2$.

Zároveň nešedé jsou právě tři kruhy s poloměrem 1 cm. Obsah každého z nich je, jak víme, $\pi \text{ cm}^2$. Na šedou oblast tedy zbývá obsah $(6 + \sqrt{3} + \pi) \text{ cm}^2 - 3\pi \text{ cm}^2 = (6 + \sqrt{3} - 2\pi) \text{ cm}^2$.

Komentář: Většina došlých řešení používala podobnou myšlenku jako vzorové řešení. Úloha se dala řešit i spočítáním obsahů jednotlivých tmavých oblastí například pomocí čtverce a pravidelného šestiúhelníku opsaného kruhu s poloměrem 1, nebo dokreslením vnějšího trojúhelníku.

Úlohy druhé série opravovali a komentáře sepsali: 1. Lenka Poljaková, 2. Lukáš Koucký, 3. Vít Jiří Houfek, 4. Jakub Trčka, 5. Sára Šamánková, 6. Adam Dřínek, 7. Veronika Menšíková

Průvodní povídání 2

Diofantické rovnice

Milý pikomatačku,

vítáme Tě u druhého dílu letošního průvodního povídání! Minule jsme se naučili něco o dělitelnosti a modulu, teď to využijeme na řešení lineárních diofantických rovnic.

Bézoutova věta:

Pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$, kde $a \neq 0$, existují $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$a \cdot x + b \cdot y = \text{nsd}(a, b).$$

Neboli ke každé nenulové dvojici čísel dokážeme najít takové koeficienty, aby se to sečetlo na jejich největšího společného dělitele.

Důkaz: Důkaz vynecháme. Jedná se o určení takových koeficientů pomocí Euklidova algoritmu pro hledání největšího společného dělitele.

Příklad: Pro dvojici čísel 15, 21 a jejich největší společný dělitel 3 jsou odpovídající koeficienty 3, -2. Dostáváme $15 \cdot 3 + 21 \cdot (-2) = 3$.

Definice: Diofantická rovnice je rovnice s celočíselnými koeficienty o několika neznámých, řešení hledáme v oboru celých nebo přirozených čísel. Jedná se například o rovnici $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, jejíž přirozená řešení jsou tzv. Pythagorejské trojice. Řešení nějakých diofantických rovnic nám zatím nejsou známa, například pro $a^3 + b^3 + c^3 = 33$.

Definice: Lineární diofantickou rovnici se dvěma neznámými rozumíme rovnici tvaru $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ jsou zadané parametry a $x, y \in \mathbb{Z}$ neznámé.

Pravidlo řešitelnosti:

Lineární diofantická rovnice se dvěma neznámými má řešení právě tehdy, když $\text{nsd}(a, b) \mid c$.

Důkaz: Abychom dokázali, že věta platí „právě tehdy, když“ dokážeme samostatně dvě části. Nejprve dokážeme, že pokud řešení existuje, pak $\text{nsd}(a, b) \mid c$. Poté dokážeme, že pokud $\text{nsd}(a, b) \mid c$, pak má rovnice řešení.

Pokud rovnice řešení má, pak $\text{nsd}(a, b) \mid ax + by$ ($\text{nsd}(a, b)$ dělí oba sčítance). Protože $ax + by = c$, pak nutně $\text{nsd}(a, b) \mid c$.

A teď druhá část důkazu, kdy předpokládáme $\text{nsd}(a, b) \mid c$ a chceme z toho vyvodit, že rovnice má řešení. Ze vztahu $\text{nsd}(a, b) \mid c$ a definice dělitelnosti existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $c = k \cdot \text{nsd}(a, b)$. Aplikujeme Bézoutovu větu na rovnici $ax + by = \text{nsd}(a, b)$ a dostaneme řešení x', y' . Rovnici vynásobíme číslem k a máme

$$k \cdot ax' + k \cdot by' = k \cdot \text{nsd}(a, b) = c.$$

Z toho určíme, že kx', ky' musí být řešení původní rovnice.

Příklad: Najděte celočíselné řešení rovnice $15x + 18y = 5$. Největší společný dělitel čísel 15 a 18 je 3. Tedy at' už budeme čísla 15 a 18 násobit celými čísly jakkoli, jejich součet vždy bude dělitelný třemi. Pravá strana ale dělitelná třemi není, takže rovnice nemá celočíselné řešení. To je přímo v souladu s pravidlem řešitelnosti.

Příklad: Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $10x - 6y = 16$.

Protože $\text{nsd}(10, 6) = 2$ a $2 \mid 16$, z pravidla řešitelnosti plyne, že nějaké řešení určitě existuje. Rovnici tedy vydělíme dvojkou a vydáme se hledat řešení rovnice $5x - 3y = 8$. Vždy si vybereme proměnnou s nižším koeficientem (v absolutní hodnotě), teď to je y . Poté ji vyjádříme a dáme ze zlomku pryč celou část. Následně vyžadujeme, aby zbylý zlomek byl celým číslem. Až už dostaneme jen celou část a ne zlomek, postup končí. Začneme tedy upravovat:

$$3y = 5x - 8 \Rightarrow y = \frac{5x - 8}{3} = \frac{2x - 2}{3} + x - 2.$$

Na levé straně máme celé číslo y , napravo máme zlomek $(2x - 2)/3$ a celé číslo $x - 2$. Tento zlomek tedy také musí být celý, označme jeho hodnotu jako $k_1 \in \mathbb{Z}$. Dále algebraicky vyjádříme:

$$\frac{2x - 2}{3} = k_1 \Rightarrow 2x - 2 = 3k_1 \Rightarrow x = \frac{3k_1 + 2}{2} = \frac{k_1}{2} + k_1 + 1.$$

Nyní provedeme podobnou úvahu ještě jednou: Víme, že x a $k_1 + 1$ jsou celá čísla, tedy i zlomek $k_1/2$ musí být celé číslo. Tedy musí existovat nějaké k_2 takové, že $k_1 = 2 \cdot k_2$. Nyní můžeme začít zpětně dosazovat:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2k_2, \\ x &= \frac{3k_1 + 2}{2} = \frac{3 \cdot 2k_2 + 2}{2} = 3k_2 + 1, \\ y &= \frac{5x - 8}{3} = \frac{5 \cdot (3k_2 + 1) - 8}{3} = 5k_2 - 1. \end{aligned}$$

Řešením původní rovnice je právě každá dvojice $x = 3k + 1, y = 5k - 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

Definice: Pro danou lineární diofantickou rovnici $ax + by = c$ je rovnice

$$ax + by = 0$$

její přidruženou homogenní rovnici.

Rovnici si můžeme přepsat do tvaru $ax = -by$ a vidíme, že řešením je určitě třeba $x = -b, y = a$. Bude se nám ale více hodit řešení $x = -b/\text{nsd}(a, b)$, $y = a/\text{nsd}(a, b)$. Toto řešení už nemůžeme ničím vydělit, protože by nebylo celočíselné. Můžeme ale toto řešení vynásobit libovolným celým číslem a stále se bude jednat o řešení. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je tedy

$$x = \frac{-kb}{\text{nsd}(a, b)}, \quad y = \frac{ka}{\text{nsd}(a, b)},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

Příklad: Určete všechna celočíselná řešení rovnice $10x - 6y = 0$. Spočítáme $\text{nsd}(10, -6) = 2$. Dosadíme do vzorce, který jsme si právě odvodili, a získáme $x = 6k/2 = 3k$, $y = 10k/2 = 5k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

Tvrzení: Pokud má lineární diofantická rovnice řešení, má jich nekonečně mnoho.

Důkaz: Její přidružená homogenní rovnice určitě má nekonečno řešení, jak jsme před chvílí ukázali. Takové řešení můžeme k původní rovnici přičíst a neovlivní se tím součet na pravé straně:

$$\begin{aligned} & ax' + by' = c \\ & + \\ & a \cdot \frac{-kb}{\text{nsd}(a, b)} + b \cdot \frac{ka}{\text{nsd}(a, b)} = 0 \\ & = \\ & a \cdot \left(x' + \frac{-kb}{\text{nsd}(a, b)}\right) + b \cdot \left(y' + \frac{ka}{\text{nsd}(a, b)}\right) = c. \end{aligned}$$

Když se podíváme na příklad s rovnicí $10x - 6y = 16$, můžeme tipnout základní řešení $x = 1$, $y = -1$. K tomuto řešení můžeme přičítat řešení její přidružené homogenní rovnice. To už jsme spočítali jako $x = 3k$, $y = 5k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné. Získáme tím všechna řešení původní rovnice, a to $x = 3k + 1$, $y = 5k - 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$. To stejné nám vyšlo i předtím. Ne vždy vyjde úplně ten stejný tvar pomocí těchto dvou metod, ale vždy se bude jednat o tu stejnou množinu řešení.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 2. sérii

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
1.–7.	1.–2.	Stanislav Beneš	8. GJNP	5	5	5	5	5	5	-	-	30	60
		Miroslav Hrinko	8. GCDP	5	5	5	5	5	5	5	-	30	60
	1.–5.	Matyáš Hazdra	9. GNAP	5	5	5	-	5	5	5	-	30	60
		Matěj Krivánek	9. GMBU	5	5	5	5	4	5	5	-	30	60
		Tyge Matthews	9. GNSP	5	5	5	5	5	5	-	5	30	60
		Jan Němeček	9. NPRG	5	5	5	5	5	5	-	5	30	60
		Dan Školař	9. ZSBR	5	5	5	5	4	5	5	-	30	60
8.–10.	3.	Tomáš Kvapil	8. PORG	4	5	5	5	4	5	5	-	29	59
	6.–7.	Noel Probst	9. PORG	5	5	5	5	5	5	5	-	30	59
		Lukas Stanovsky	9. PORG	5	5	-	4	5	5	5	-	29	59
11.–13.	1.	David Kabelka	7. NPRG	5	5	5	5	-	5	5	-	30	58
	8.–9.	Jiří Grepl	9. ZGUP	5	5	5	5	2	5	5	-	30	58
		Matěj Kubín	9. GLIP	4	5	5	4	-	5	5	-	28	58
14.	2.	Veronika Loudová	7. GNAP	5	5	5	4	3	5	5	-	29	57
15.–16.	10.–11.	Martin Dostál	9. GCHO	5	5	5	5	4	5	4	-	29	56
		Alžběta Reitmayerová	9. GSPP	5	5	5	4	5	5	5	-	30	56
17.–18.	4.	Vít Lukavský	8. ZMNK	5	5	5	-	4	5	5	-	29	54
	12.	Robin Tesař	9. GCDP	5	5	5	4	5	-	4	-	28	54
19.–21.	3.	Adam Urx	7. PORG	5	5	5	5	3	-	4	-	27	53
	13.–14.	Pavčina Petrželová	9. GJKP	5	5	5	3	5	3	5	-	28	53
		Mariana Warausová	9. GKSP	5	5	5	5	-	5	5	-	30	53
		Agnes Dostálová	7. GMNP	5	5	5	4	-	5	5	-	29	52
22.	4.	Agnes Dostálová	7. GMNP	5	5	5	4	-	5	5	-	29	52
23.	5.	Petr Kysela	7. GCKR	5	5	5	3	3	5	5	-	28	51
24.	15.	Jitka Stejskalová	9. ZNDC	5	5	5	2	5	5	5	-	30	50
25.	5.	Sofie Kaucká	8. GOPG	5	5	2	5	3	2	5	-	25	49
26.–27.	6.–7.	Vlastimil Straka	7. ZTRE	5	5	5	5	-	5	5	-	30	48
		Bedřich Škop	7. GMSP	5	1	5	3	1	5	5	-	24	48
28.–29.	1.	Matias Eisner	6. ZLTP	5	5	5	5	-	-	-	-	20	47
	6.	Radka Valkovičová	8. ZOKZ	5	5	5	5	3	-	5	-	28	47
30.–31.	2.–3.	Jakub Zelenka	6. GRIC	5	2	5	5	2	5	4	-	26	46
		Maximilian Čovan	6. GJKP	5	5	-	3	5	5	-	-	23	46
		Eva-Margarita Migel	8. GNAP	5	5	5	3	4	-	-	-	22	45
33.–34.	8.–9.	Adéla Manová	7. GLPP	5	5	4	3	2	-	4	-	23	44
		Martina Vojteková	7. PORG	4	5	5	-	5	-	5	-	24	44
		Ján Minárik	7. GABP	5	5	-	3	5	5	-	-	23	43
35.–37.	8.	Matěj Matyáška	8. ZKON	5	4	-	3	2	5	3	-	22	43
	16.	Josefína Svatušková	9. PORG	5	4	-	-	4	-	5	-	18	43

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
38.	11.	Lada Karásková	7. PORG	5	5	-	3	2	-	-	-	15	42
39.	9.	Jiří Mlynář	8. PORG	-	5	-	5	2	2	-	-	14	40
40.-41.	17.-18.	Jana Malkovská	9. ZGUP	4	5	-	4	3	-	5	-	21	39
		Šimon Pelák	9. PORG	5	5	5	-	4	-	5	-	24	39
42.	4.	Antonín Červený	6. GCDP	5	5	-	5	-	-	-	-	15	38
43.	19.	Marek Nechvátal	9. PORG	4	5	-	3	-	1	4	-	17	36
44.-45.	12.-13.	Hana Korejšová	7. ZPSP	-	5	5	3	-	-	5	-	18	35
		Alžběta Pelikánová	7. GBUP	5	5	-	5	-	5	-	-	20	35
46.-47.	14.	Karel Olšar	7. GCKR	5	5	-	3	3	-	-	-	16	32
	10.	Jakub Hrabálek	8. ZSJN	5	2	5	-	-	-	-	-	12	32
48.	15.	Adam Donát	7. GCDP	4	1	5	-	-	1	-	-	11	31
49.-52.	1.	Marek Houfek	5. ZCHP	5	5	-	-	-	-	-	-	10	30
	16.-17.	Pavčina Břízová	7. GTNV	5	-	-	-	-	5	-	-	10	30
		Magdaléna Pelikánová	7. GBUP	5	5	-	-	-	5	-	-	15	30
	11.	Lukáš Kopecký	8. GAJL	5	5	5	5	-	5	5	-	30	30
53.-54.	18.	Jaroslav Posch	7. GMKR	-	5	-	4	4	-	-	-	13	28
	12.	Jan Foldyna	8. ZAJP	4	5	-	3	2	-	4	-	18	28
55.	5.	Jonas Koucky	6. GJKP	5	3	-	-	-	-	-	-	8	27
56.	20.	Kateřina Tesař	9. NPRG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	26
57.-59.	19.	Emma Tereza Collis	7. GMSP	5	5	5	5	5	-	-	-	25	25
	13.-14.	Matěj Kiapeš	8. ZKON	3	-	-	-	2	-	3	-	8	25
		Metodej Samal	8. ZKVL	5	5	5	-	5	5	-	-	25	25
60.-61.	20.	Adam Kozák	7. ZTRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
	15.	Mikuláš Krubner	8. GBEN	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
62.	21.	Tomáš Blahout	9. GCHE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	23
63.-64.	6.	Patrik Nedvěd	6. ZSTD	-	5	5	1	-	-	-	-	11	22
	16.	Nikolas Doležal	8. ZKYS	-	-	-	-	-	-	-	-	0	22
65.-66.	7.	Čestmír Hlaváček	6. GABP	4	3	5	-	1	4	4	-	21	21
	17.	Karel Kanický	8. ZKYS	5	5	-	-	-	-	-	-	10	21
67.-70.	8.	Dominik Holtan	6. GMSP	4	5	-	-	-	-	-	-	9	20
	18.-19.	Roman Chasovskikh	8. GKMP	5	5	5	1	-	-	4	-	20	20
		Jan Daniel Elleder	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
	22.	Matěj Pavlok	9. ZERM	-	-	-	-	-	-	-	-	0	20
71.-72.	9.	Karolína Tarant	6. NPRG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
	20.	Adéla Sůkeníková	8. ZLJN	5	4	-	-	-	5	5	-	19	19
73.-74.	10.	Victoria Bartůňková	6. ZMAC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
	21.	Petr M. Grametbauer	8. ZLOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
75.-76.	21.	Vojtěch Pešl	7. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
	23.	Gleb Baulin	9. GPKV	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
77.-82.	22.	Richard Bechera	7. GRIC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	22.-23.	Kristian Poljak	8. GPRE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Dorota Slamková	8. GOHR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
	24.-26.	Barbora Bouchnerová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
		Jakub Pešl	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
77.–82.	24.–26.	Jan Rosík	9. ZSP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	15
83.–84.	23.	Vojtěch Bárta	7. GLIP	-	-	-	-	-	-	5	-	5	13
	24.	Matteo Dalrymple	8. ZSBR	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
85.	24.	Robert Faltys	7. ZLUZ	4	-	-	-	-	-	-	-	4	11
86.–88.	2.	Anna Menšíková	5. ZBJP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
	27.–28.	Františka Cindrová	9. GJKP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
		Vojtěch Kadlec	9. PORG	5	-	-	-	5	-	-	-	10	10
89.	25.	Lenka Pulkrábková	8. ZBOB	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
90.	29.	Jonáš Dinga	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
91.	11.	Viktorii Anisimová	6. ZLUZ	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
92.	26.	Sebastian Mlích	8. GMOP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3
93.	27.	Marie Hošková	8. GABP	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2
94.–95.	30.	Elena Šlaisová	9. ZMEC	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1