

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

máme tu pro vás třetí leták 40. ročníku matematické soutěže Pikomat. Najdete v něm zadání třetí série a výsledky a vzorová řešení té první. Třetí série má termín odeslání 13. ledna 2025.

Pikoúterý a víkendovka

Kromě matematických úloh pro vás připravujeme i spoustu dalších neméně zajímavých akcí. 14. prosince proběhla Vánoční besídka. Nechyběla venkovní hra, povídání s přáteli, hraní deskovek, ani vánoční dárečky. Úterní večery se pravidelně konají Pikoúterý, setkání řešitelů s organizátory v karlínské budově Matfyzu. Naučíte se s námi něco nového z matematiky a poté si zahrajeme deskové hry. Po vánočních prázdninách se na vás budeme těšit opět 7. ledna od 17:20. O víkendu 24.–26. ledna se uskuteční další Pikomatí víkendovka, tentokrát ve skautské klubovně Kulatá Bába v Kladně. Uprostřed zimy a uprostřed divočiny s námi můžete zažít matematická i nematematická dobrodružství.

Soustředění a tábor

Nejúspěšnější řešitele prvních čtyř sérií pozveme na jarní soustředění, které proběhne 2.–9. dubna. Termín už má také náš letní tábor, proběhne 26. července – 9. srpna na Vodních stavbách Bratrouchov. Uvítáme zde každého, kdo má vřelý vztah k matematice a rád se dozví něco nového.

Více informací najdete na naší webové stránce, případně také na našem Instagramu. Pokud budete mít nějaký dotaz nebo připomínku, napište nám na náš e-mail pikomat@mff.cuni.cz.

Šťastné a veselé Vánoce a hodně úspěchů v novém roce vám přeji

Vaši organizátoři

Zadání úloh 3. série 40. ročníku

Termín odeslání: 13. 1. 2025

Vědecké pojmenování „dinosauria“ znamená „strašný ještěr“. Tento termín vytvořil paleontolog Richard Owen v roce 1842.

Úloha č. 1: *Stegosaurus chce do políček napsat čísla 1 až 5, každé právě jednou, tak, aby všechny nerovnosti platily.*

$$\square < \square > \square < \square > \square$$

Kolika způsoby to může udělat? Zdůvodněte.

Dinosauri neřvali jako ve filmech. Vědci se domnívají, že vydávali nízké zvuky, podobné dnešním holubům nebo krokodýlům.

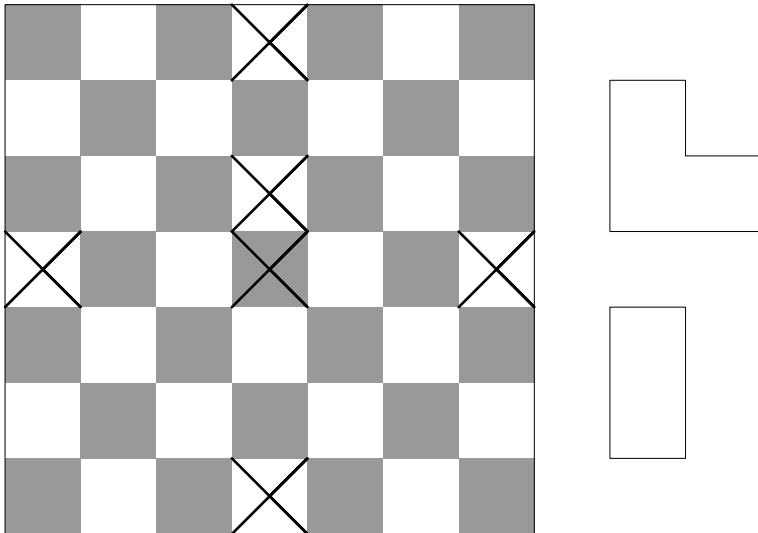
Úloha č. 2: *Stegosaurus se narodil 1. ledna. Když mu bylo 100 let a 299 dní (jedná se o 300. den daného kalendářního roku), bylo úterý. Když mu bylo 101 let a 199 dní, bylo také úterý. Jaký den v týdnu byl, když stegosaurovi bylo 99 let a 99 dní? Odpověď zdůvodněte.*

Některé fosílie byly dříve mylně považovány za dračí kosti. Například v Číně byly kosterní pozůstatky dinosaurů spojovány s legendami o dracích.

Úloha č. 3: *Ankylosaurus má šachovnici velikosti 7×7 . Velociraptor mu z ní vystříhl 6 políček jako na obrázku 1. Ankylosaurus chce zbylá políčka šachovnice bez překryvu a bez přečínování pokrýt L-dílky (pokrývající 3 políčka) nebo I-dílky (pokrývající 2 políčka) jako na obrázku 1, přičemž dílky může otáčet. Bohužel ale L-dílky jsou mnohem dražší než I-dílky, proto se snaží využít co nejmeně L-dílků.*

Varianta za 3 body: Nakreslete rozmístění dílků na šachovnici s co nejmenším počtem L-dílků.

Varianta za 5 bodů: Nakreslete takové rozmístění dílků a pečlivě zdůvodněte, proč nelze použít méně L-dílků.



Obr. 1

Spinosaurus byl pravděpodobně semi-vodní. Paleontologické studie ukazují, že měl adaptace na plavání, jako byly ploché nohy a husté kosti.

Úloha č. 4: Tato úloha se pojí s Průvodním povídáním přiloženým u zadání 2. série. Doplňte slova do následujícího textu.

Čínská zbytková věta:

Mějme nesoudělná přirozená čísla a, b . Mějme nezáporná celá čísla $g < a, h < b$. Pak existuje právě jedno nezáporné celé číslo m , pro které platí:

$$m \equiv g \pmod{a}, \quad m \equiv h \pmod{b}, \quad m < a \cdot b.$$

Důkaz: Nejprve dokážeme, že takové m existuje maximálně jedno. To uděláme tak, že si představíme, že taková m existují alespoň dvě, a ukážeme, že tato situace nemůže nastat. Tedy předpokládejme, že existují dvě různá m_1 a m_2 tak, že platí $m_1 \equiv g \pmod{a}, m_1 \equiv h \pmod{b}, m_2 \equiv g \pmod{a}, m_2 \equiv h \pmod{b}$. Takovému přístupu říkáme důkaz sporem.

Předpokládejme, že $m_1 > m_2$ (kdyby bylo $m_2 > m_1$, tyto dvě čísla prohodíme a už můžeme pokračovat, jak jsme chtěli). Z tvrzení o součtu zbytků plyne, že $m_1 - m_2 \equiv \dots \pmod{a}, m_1 - m_2 \equiv \dots \pmod{b}$. Tedy číslo a

(dělí/nedělí) číslo $m_1 - m_2$, podobně číslo b (dělí/nedělí) číslo $m_1 - m_2$.
 Z toho a z nesoudělnosti čísel a, b plyne, že $a \cdot b$ (dělí/nedělí) číslo $m_1 - m_2$.

Z definice dělitelnosti tedy existuje nějaké $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $m_1 - m_2 = k \cdot a \cdot b$.
 Jelikož $m_1 > m_2$, je $m_1 - m_2$ kladné. Tedy i číslo k musí být kladné. Jelikož je zároveň celé, musí platit, že $k \geq 1$. Tedy

$$m_1 - m_2 = k \cdot a \cdot b \geq \dots \cdot a \cdot b = a \cdot b.$$

Zároveň $a \cdot b > m_1$, tedy i $a \cdot b > m_1 - m_2$. Dosazením do předchozí rovnosti dostáváme, že

$$a \cdot b > m_1 - m_2 = \dots \geq \dots = a \cdot b,$$

což ale nemůže nastat, neboli jsme dostali spor. Tedy takové m může skutečně existovat maximálně jedno.

Dále ukážeme, že existuje alespoň jedno m . Pro to si nejprve uvědomíme, že dvojic čísel g, h , kde $0 \leq g < a$, $0 \leq h < b$, je celkem Zároveň víme, že platí $0 \leq m < a \cdot b$, tedy číslo m může nabývat různých hodnot.

Z předchozí části důkazu již víme, že s každou dvojicí čísel g, h se pojí maximálně (žádná/jedna) hodnota čísla m . Víme, že dvojic g, h je (méně než / stejně jako / více než) kolik je možných hodnot čísla m . Potřebujeme ověřit, že ke každé dvojici čísel g, h existuje alespoň (žádná/jedna) hodnota čísla m .

Nyní zkusíme novým způsobem spočítat, kolika různých hodnot může m nabývat. Pro každou dvojici čísel g, h si zapíšeme tolik možností, kolika hodnot může m příslušné této dvojici nabývat. Z předchozí části důkazu víme, že tento počet možností je roven nebo Pokud by tento počet možností byl roven vždy jedné, dostali bychom celkový počet možností roven Pokud by pro nějakou dvojici čísel g, h byl tento počet možností nulový, pak by celkový počet možností pro m byl (ostře menší než / stejný jako / ostře větší než) $a \cdot b$. Taková situace však nemůže nastat, neboť víme, že možností pro m je dohromady přesně

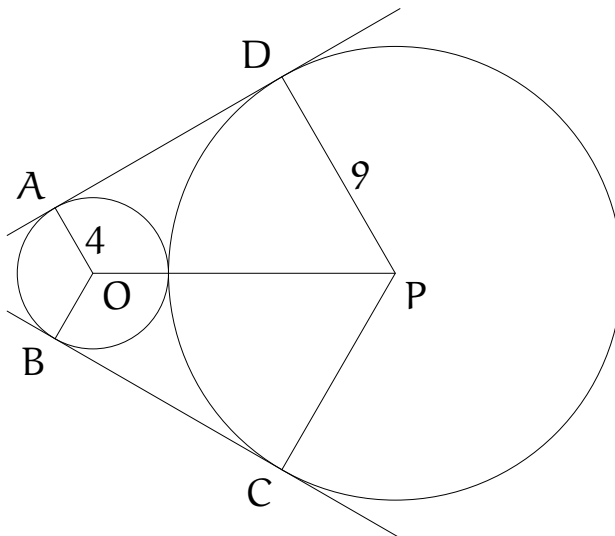
Tedy pro každou dvojici g, h musí být alespoň jedno m . Zároveň již víme, že pro každou dvojici g, h musí být maximálně jedno m . Dohromady dostáváme, že takové m musí existovat právě jedno, což jsme chtěli dokázat.

Příklad: Ve skupině je x stegosaurů. Když jsme je rozdělili do pětic, tři přebývali. Když jsme je rozdělili do sedmic, pět přebývalo. Stegosauri jsou alespoň dva a není jich více než 35. Stegosaurů je Z Čínské zbytkové věty víme, že se jedná o (jediný možný výsledek / jeden z více možných výsledků).

Maiasaura, což znamená „dobrá matka ještěrka“, pravděpodobně pečovala o své potomky. Fosilie naznačují, že mláďata zůstávala v hnízdech pod dohledem rodičů.

Úloha č. 5: Do skály byl vytesán obrazec 2. Jednalo se o kružnici m se středem v bodě O a poloměrem 4 cm. Dále tam byla kružnice n se středem v bodě P a poloměrem 9 cm. Body A a B leží na kružnici m , body C a D leží na kružnici n . Přímky AD a BC jsou tečnami kružnic m a n . Určete obsah šestiúhelníku $AOBCPD$.

Pomůcka: Tečna je kolmá na poloměr. V našem případě např. poloměr AO je kolmý na tečnu AD .



Obr. 2

Pachycephalosaurus měl velmi tlustou lebku, která mohla být použita při soubojích mezi samci o dominanci nebo partnery.

Úloha č. 6: *Ankylosaurus si myslí tři kladná čísla (nemusí být pouze přirozená, může se jednat i např. o 0,5) x , y , z , splňující*

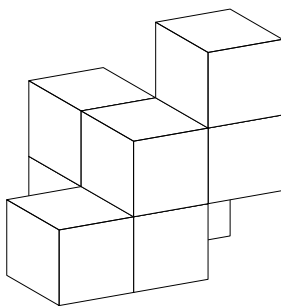
$$x + \frac{1}{y} = 4, \quad y + \frac{1}{z} = 1, \quad z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}.$$

Určete, kolik je $x \cdot y \cdot z$. Dobře popište postup od rovnic až k výsledku.

Dinosauři měli často „náhradní“ zuby – například ceratopsidi mohli regenerovat své zuby několikrát za život, aby si udrželi účinnost při drcení tvrdé vegetace.

Úloha č. 7: *Stegosaurus našel tisíce kamenů tvaru jako na obrázku 3. Rád by z nich slepil kostku velikosti $50 \times 50 \times 50$, která musí být uvnitř zcela zaplněná, ale ven můžou části kamenů vyčnívat. Poradte mu, jak na to.*

Varianta za 3 body: Poradte stegosaurovi, jak namísto kostky obdobně vytvořit tyč o rozměrech $2 \times 4 \times 50$.

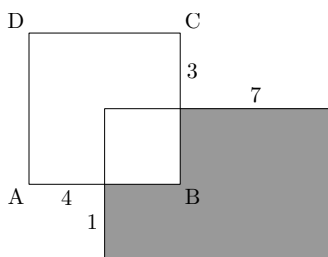


Obr. 3

Vzorová řešení a komentáře k 1. sérii úloh

Úloha č. 1

Teritorium ABCD je čtverec s obsahem 144 m^2 . Dále jsou známy některé délky dle obrázku 4. Určete obsah šedého teritoria.



Obr. 4

Řešení: Víme, že čtverec ABCD má obsah 144 m^2 . Obsah čtverce o délce strany a se počítá jako a^2 , proto:

$$a^2 = 144 \text{ m}^2,$$

$$a = 12 \text{ m}.$$

Strana čtverce má tedy délku 12 m. Velký obdélník si označíme EFGH. Průsečík stran AB a EH nazvěme X, průsečík BC a GH označíme Y. Pomocí délky strany čtverce dopočítáme délky BX a BY:

$$12 - |BX| = 4 \text{ m},$$

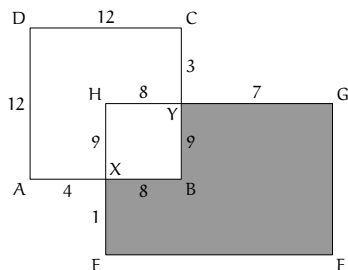
$$|BX| = 8 \text{ m},$$

$$12 - |BY| = 3 \text{ m},$$

$$|BY| = 9 \text{ m}.$$

Víme, že $|BX| = |HY|$ a $|HX| = |BY|$, což můžeme vidět na obr. 5. Tím pádem jsme schopni dopočítat obsah obdélníku BYHX i EFGH. BYHX má strany o délkách 8 m a 9 m a EFGH o délkách $8 + 7 = 15 \text{ m}$ a $9 + 1 = 10 \text{ m}$. Obsah šedého teritoria zjistíme odečtením obsahu BYHX od obsahu EFGH:

$$15 \cdot 10 - 8 \cdot 9 = 150 - 72 = 78 \text{ m}^2.$$



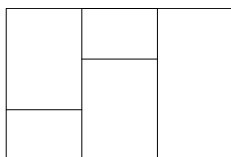
Obr. 5

Obsah šedého teritoria je 78 m^2 .

Komentář: Někteří řešitelé neodčítali obsah obdélníku BYHX od EFGH, ale rozdělili si šedé teritorium na tři části, které postupně spočítali. Celkově nebylo mnoho chyb, pouze někdy řešitelé omylem spočítali obsah celého obdélníku EFGH a neodečetli obsah BYHX. Za toto dostali 4 body.

Úloha č. 2

Na obrázku 6 je vyznačeno pět teritorií. Každý z dinosaurů *velociraptor*, *stegosaurus*, *triceratops*, *tyrannosaurus* a *pterodaktyl* má právě jedno vlastní teritorium. Nevíme však, kdo má jaké. Víme ale, že teritorium *stegosaura* nesousedí s teritoriem *velociraptora* ani *triceratopce*. Dokonce teritorium *triceratopce* nesousedí s teritoriem *tyrannosaura*. Určete počet možností, kterými lze přiřadit teritoria jednotlivým dinosaurům. Tyto možnosti nakreslete a zdůvodněte, proč jich nemůže být více.



Obr. 6

Řešení: Nejprve si povšimněme, že teritorium uprostřed dole sousedí se všemi ostatními. Zároveň, vezmeme-li si libovolného dinosaura jiného, než *pterodaktyla*, najdeme k němu alespoň jednoho jiného dinosaura, se kterým nesousedí. Tedy dole uprostřed může být pouze *pterodaktyl*.

Dále víme, že triceratops nesousedí s dvěma dalšími dinosaury – stegosaurem a tyranosaurem. Pokud by se triceratops nacházel v levém horním či prostředním horním teritoriu, nebylo by již kam stegosaura a tyranosaura umístit. Tedy musí být teritorium triceratopse buďto vlevo dole, nebo vpravo. Stejně se dá ukázat, že v jednom z těchto teritorií musí být i stegosaurus.

Počet možností, kterými lze stegosaura a triceratopse do těchto dvou teritorií umístit, je roven dvěma. Pro každou z těchto možností je již dále právě jeden způsob, jak umístit zbylé dinosaury. Tedy existují právě dva způsoby, jak dinosaurům rozdělit jejich teritoria. Tyto způsoby jsou vidět na obrázcích 7 a 8.

	velociraptor	triceratops
tyranosaurus		
stegosaurus	pterodaktyl	

Obr. 7

	tyranosaurus	stegosaurus
velociraptor		
triceratops	pterodaktyl	

Obr. 8

Komentář: Většina řešitelů s úlohou neměla problém. Nejčastěji se objevovaly malé chyby z nepozornosti, ale ani těch moc nebylo.

Úloha č. 3

Potkalo se několik dinosaurů. Každý s každým si právě jednou dal highfive. Určete, zda byl celkový počet highfive lichý, nebo sudý, pokud skupina obsahovala 10, 11, 40, nebo 41 dinosaurů.

Řešení: Každý dinosaur dá highfive všem ostatním dinosaurům. Tedy ve skupině n dinosaurů dá každý $n - 1$ highfivů. Třeba v prvním případě dal každý devět highfivů. Abychom získali celkový počet highfivů, vynásobíme počet dinosaurů počtem highfivů, který každý z nich dá. Poté však musíme tento počet vydělit dvěma, protože každý highfive jsme započítali dvakrát, k oběma dinosaurům, kteří si ho dávali. Na skupinu n dinosaurů tím pádem připadá

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} \text{ highfivů.}$$

Vypočítejme tedy počet highfivů pro jednotlivé případy.

- Pro 10 dinosaurů dá každý 9 highfivů. Celkem tedy jde o

$$\frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ highfivů.}$$

To je liché.

- Pro 11 dinosaurů dá každý 10 highfivů. Celkový počet je tedy

$$\frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \text{ highfivů.}$$

To je také liché.

- Pro 40 dinosaurů dá každý 39 highfivů. Celkově se jedná o

$$\frac{39 \cdot 40}{2} = 780 \text{ highfivů.}$$

To je sudé.

- Ve skupině 41 dinosaurů dá každý 40 highfivů. Celkově se jedná o

$$\frac{40 \cdot 41}{2} = 820 \text{ highfivů.}$$

To je také sudé.

Také si můžeme uvědomit, že abychom získali sudý počet highfivů, musí být čitatel v našem vzorečku dělitelný čtyřmi. Když ho totiž vydělíme dvěma (jmenovatelem), výsledek zůstane sudý. Jelikož se sudá a lichá čísla střídají a dělitelné čtyřmi může být jen sudé číslo, musí být jedno z čísel n a $n - 1$ dělitelné čtyřmi. Počet highfivů je tedy sudý, pokud je n nebo $n - 1$, tedy počet dinosaurů nebo počet dinosaurů zmenšený o jedna, dělitelný čtyřmi. Pokud to tak není, počet highfivů je lichý.

Komentář: Valná většina řešitelů počítala počet highfivů pro každého dinosaura zvlášť. Někteří si také všímali sudosti/lichosti součtů. Několik řešitelů ale nevzalo v potaz, že každý highfive započítali dvakrát.

Úloha č. 4

Stegosaurus, velociraptor a argentinosaurus jedli kameny. Trojnásobek kamenů, které snědl velociraptor, je menší než počet kamenů, které snědl argentinosaurus.

Patnáctinásobek kamenů, které snědl stegosaurus, je roven devatenáctinásobku kamenů, které snědl argentinosaurus. Velociraptor snědl méně než 37 kamenů. Stegosaurus snědl o 6 méně kamenů než kolik snědli velociraptor a argentinosaurus dohromady. Kolik kamenů snědli jednotliví dinosauři? Výsledkem jsou celá nezáporná čísla. Uveďte všechna řešení a zdůvodněte, proč řešení nemůže existovat více.

Řešení: Necht s, v a a postupně značí počet kamenů, které snědl stegosaurus, velociraptor a argentinosaurus. Ze zadání má platit

$$\begin{aligned} 3v &< a, \\ 15s &= 19a, \\ v &< 37, \\ s + 6 &= v + a. \end{aligned}$$

Jelikož s i a jsou celá čísla a 15 a 19 jsou nesoudělná, musí z druhé rovnice platit, že a je dělitelné 15, tedy $a = 15k$. Z druhé rovnice pak tedy $s = 19k$. Po dosazení do čtvrté dostáváme $19k + 6 = 15k + v$, tedy $v = 4k + 6$. Po dosazení za v do $3v < a$ dostáváme $12k + 18 < 15k$, tedy $k > 6$. Zároveň po dosazení za v do $v < 37$ dostáváme $4k + 6 < 37$, tedy $k < \frac{31}{4}$. Víme, že v je celočíselné, takže $k \leq 7$. Aby platilo $k > 6$ a zároveň $k \leq 7$, musí už nutně platit $k = 7$, tudíž

$$\begin{aligned} a &= 15 \cdot 7 = 105, \\ s &= 19 \cdot 7 = 133, \\ v &= s + 6 - a = 133 + 6 - 105 = 34. \end{aligned}$$

Stegosaurus tedy snědl 133, velociraptor 34 a argentinosaurus 105 kamenů.

Komentář: Většina správných řešení postupovala podobně jako vzorové, nebo možná řešení omezila na několik možností, která vyzkoušela. Nejčastější chybou bylo neúplné zdůvodnění toho, že jiná řešení neexistují.

Úloha č. 5

Triceratops a velociraptor stojí na ose celých čísel. Triceratops začíná na čísle 1 a smí skákat +1 nebo +2. Velociraptor stojí na čísle 26 a smí skákat −1, −2, nebo −3. Strídají se ve skocích, začíná velociraptor. Pokud jsou na stejném čísle, je velociraptor uloven triceratopsem, čímž vyhrál triceratops. Pokud se velociraptorovi

podaří triceratopse přeskočit, uteče tím už navždy triceratopsovi, a tedy velociraptor vyhraje. Pokud budou oba dinosauři hrát, co nejlépe dovedou, kdo z nich vyhraje? Dobře popište výherní strategii.

Varianta za 3 body: zadání je stejné, jen velociraptor začíná na čísle 6.

Řešení: Aby mohl velociraptor triceratopse přeskočit a vyhrát, potřebuje, aby po skončení jednoho z jeho tahů byla mezi ním a triceratopsem právě dvě volná políčka. V tuto chvíli ho triceratops nemůže ulovit, protože se umí pohybovat jen $+1$, nebo $+2$ políčka, zároveň ale musí zahrát. Po jeho tahu pak bude mít velociraptor jistotu, že ho bude moci přeskočit tahem -3 . Jak ale velociraptor docílí toho, aby tato situace nastala?

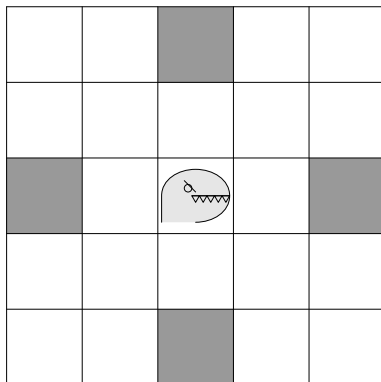
Všimněme si, že ve chvíli, kdy jsou mezi triceratopsem a velocitorem dvě volná políčka, je rozdíl čísel políček, na kterých dinosauři stojí, 3. Velociraptor tedy po každém tahu triceratopse dorovná svým tahem rozdíl tak, aby byl dělitelný třemi. V prvním kole například skočí skokem -1 z čísla 26 na číslo 25. Čímž získá požadovaný rozdíl ($25 - 1 = 24$). Poté už jen dorovná triceratopsovy tahy. Na jeho tah $+1$ zahraje -2 , na tah $+2$ zahraje -1 . Vzhledem k tomu, že triceratops nemůže zahrát $+3$, bude se rozdíl snižovat po třech a nemůže tedy dojít k přeskočení žádného násobku tří. Tím pádem po jednom z velociraptorových tahů určitě bude rozdíl pouze 3, čímž velociraptor vyhrál.

Ve variantě za tři body lze aplikovat stejnou strategii. Velociraptor v prvním kole skočí na políčko 4 čímž vytvoří požadovaný rozdíl. Triceratops ho nemůže ulovit, zároveň tahem $+1$ nebo $+2$ sníží rozdíl a v dalším kroku ho velociraptor určitě bude moci přeskočit tahem -3 . Opět vítězí velociraptor.

Komentář: Hodně řešitelů dospělo ke správnému výsledku, tedy k tomu, že vyhraje velociraptor. Často už ale chybělo úplné zdůvodnění nebo vysvětlení jeho výherní strategie. U tohoto typu úloh je potřeba popsat strategii co nejobecněji. Strategie by měla fungovat ať už triceratops hraje jakkoliv, uvedení jednoho příkladu proto nestačí. Ideálně mělo řešení popisovat způsob, jakým velociraptor reaguje na triceratopsovy tahy. Možností, jak to udělat, už bylo více.

Úloha č. 6

Na šachovnici 8×8 je tyranosaurus. Ohrožuje čtyři políčka jako na obrázku 9. Na tato políčka skáče, a tedy dokáže přeskočit sousední políčka případně obývaná dalšími dinosaury. Kolik nejvíce takových tyranosaurů může stát na jedné šachovnici, aby se žádní dva neohrožovali? Dobře zdůvodněte, proč jich na šachovnici nejde umístit více a nakreslete jedno rozmístění maximálního počtu tyranosaurů.

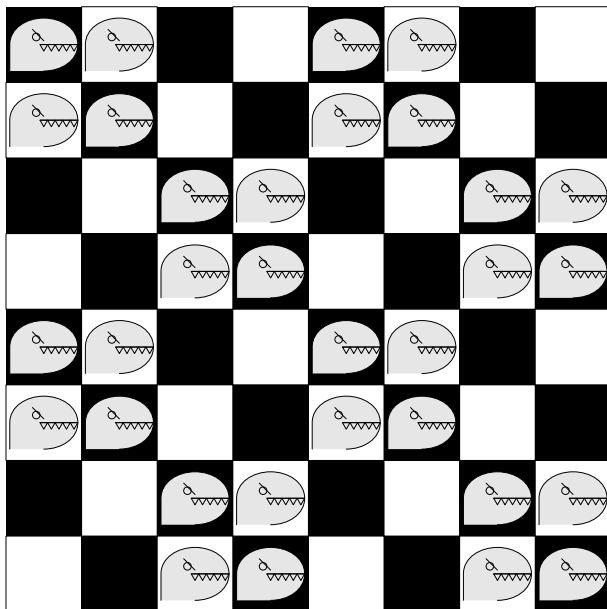


Obr. 9

Řešení: Po chvíli testování různých umístění tyranosaurů můžeme přijít na to, že nejvýhodnější je z nich vytvořit bloky 2×2 , ve kterých se žádní dva tyranosauři ohrožovat nemohou. Mezi každými dvěma bloky poté musíme horizontálně a vertikálně zanechat blok 2×2 mezeru. Pokusíme-li se tyranosauře vyplnit celou šachovnici, přijdeme na podobné nebo stejné řešení jako na obrázku 10. Na šachovnici je celkem 32 tyranosaurů.

Jak ale dokázat, že toto řešení je nejlepší možné? Důkaz provedeme takzvaně sporem. Uvažujme, že je na šachovnici 33 tyranosaurů. Protože je 8 sloupců, v nějakém sloupci by muselo být aspoň 5 tyranosaurů – kdyby v každém sloupci byli jen čtyři tyranosauři, bylo by celkem pouze $8 \cdot 4 = 32$ tyranosaurů. Sloupec rozdělíme na horní a spodní půlku, každou po 4 polích. V některé půlce musí být aspoň tři tyranosauři – kdyby v každé půlce byli jenom dva, byli by ve sloupci jen 4 tyranosauři. Nicméně 3 tyranosauře do těchto 4 polí umístit nemůžeme, protože, ať každého tyranosaura umístíme jakkoliv, vždy ohrožuje jedno další z těchto 4 polí. Maximální počet tyranosaurů v jedné půlce sloupce je tedy 2, nikoliv 3, jak jsme se snažili dokázat. Sporem jsme tedy přišli na to, že nejvyšší počet tyranosaurů na šachovnici je 32.

Komentář: Někteří řešitelé úlohu řešili tím způsobem, že vybarvili stejnou barvou políčka, na kterých mohou stát tyranosauři, kteří se vzájemně ohrožují. Poté mohli velmi jednoduše ukázat, že zaplněné mohlo být pouze každé druhé políčko stejné barvy.



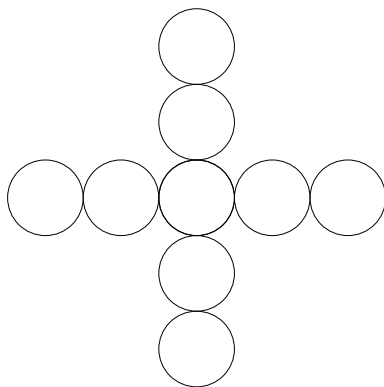
Obr. 10

Úloha č. 7

Na zemi leží hvězda o 2024 paprscích, přičemž každý paprsek je tvořen 2024 kameny zarovnanými do řady. Uprostřed těchto paprsků leží jeden středový kámen. Dohromady tedy leží na zemi $2024 \cdot 2024 + 1$ kamenů. Chasmosaurus a styracosaurus se střídají v tazích, začíná chasmosaurus. V každém tahu si daný dinosaur vybere 1, 2, nebo 3 sousedící kameny v rámci jednoho paprsku (jeden z kamenů může být středový kámen) a sní je. Vyhrává ten dinosaur, který sní poslední kámen. Pokud budou oba dinosauri hrát, co nejlépe dovedou, který z nich vyhraje? Dobře popište výherní strategii.

Varianta za 3 body: zadání je stejné, jen hvězda sestává ze středového kamene a pouze čtyř paprsků, přičemž každý paprsek je tvořen dvěma kameny zarovnanými do řady jako na obrázku 11.

Řešení: Protože počet kamenů na zemi se každým tahem zmenší, tak jeden z dinosaurů určitě vyhraje. Ukážeme, že pokud budou dinosauri hrát, jak nejlépe dovedou, tak vždy vyhraje chasmosaurus. Popíšeme jeho výherní strategii.



Obr. 11

Na začátku sní chasmosaurus středový kámen. Ponechá tak středovou symetrii kamenů podle středu původní hvězdy. Když bude styracosaurus na tahu, tak středovou symetrii svým libovolným povoleným tahem poruší. Následně je chasmosaurus schopen svým tahem symetrii vždy opět navrátit tím, že sní kameny středově souměrné k těm, které snědl styracosaurus v předcházejícím tahu. Takto může hra probíhat až do konce, kdy poslední povolený tah udělá chasmosaurus.

Takové řešení funguje pro obě varianty.

Komentář: Objevilo se mnoho neúspěšných řešení, která popisovala strategii na způsob doplňování do násobků čtyř. Ta v zásadě spočívá v tom, že v každém tahu chasmosaurus snědl 1 až 3 kameny tak, že po jeho tahu je počet zbylých kamenů dělitelný čtyřmi. Pro každou strategii je ale vždy důležité si ověřit, zdali ji hráč může vždy provést. A u této strategie může styracosaurus dostat chasmosaura do situace, ve které svou strategii použít nemůže (dokonce i ve variantě za 3 body). Takovým řešením jsem uděloval 3 body.

Úlohy první série opravovali a komentáře sepsali: 1. Luisa Troupová a Jan Škopek, 2. Helena Muchová, 3. Sára Šamánková, 4. Veronika Menšíková, 5. Lukáš Koucký, 6. Adam Dřínek, 7. Jakub Trčka a Antonín Hejný.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 1. sérii

Celkově	V roč.	Jméno a příjmení	Roč. a škola	1	2	3	4	5	6	7	P	σ	Σ
1.–10.	1.–3.	Stanislav Beneš	8. GJNP	5	5	5	5	5	5	5	-	30	30
		Miroslav Hrinko	8. GCDP	5	5	5	5	5	5	5	-	30	30
		Tomáš Kvapil	8. PORG	5	5	5	5	5	5	-	-	30	30
	1.–7.	Matyáš Hazdra	9. GNAP	5	5	5	5	5	-	5	-	30	30
		Matěj Kubín	9. GLIP	5	5	5	5	-	5	5	-	30	30
		Matěj Krivánek	9. GMBU	5	5	5	5	5	5	4	-	30	30
		Tyge Matthews	9. GNSP	5	5	5	5	5	5	-	-	30	30
		Jan Němeček	9. NPRG	5	5	5	5	5	5	3	-	30	30
		Lukas Stanovsky	9. PORG	5	5	5	5	5	5	-	-	30	30
		Dan Školař	9. ZSBR	5	5	5	5	5	5	5	-	30	30
		11.	8.	Noel Probst	9. PORG	5	5	5	4	5	5	3	-
12.–14.	1.–2.	David Kabelka	7. NPRG	5	5	5	5	5	3	-	-	28	28
		Veronika Loudová	7. GNAP	5	5	5	5	3	5	3	-	28	28
15.–17.	9.	Jiří Grepl	9. ZGUP	5	5	5	5	5	3	3	-	28	28
	1.	Matias Eisner	6. ZLTP	5	5	5	4	5	3	3	-	27	27
		3.	Lada Karásková	7. PORG	5	5	4	5	3	5	2	-	27
18.–22.	10.	Martin Dostál	9. GCHO	5	5	5	5	5	2	-	-	27	27
	4.	Adam Urx	7. PORG	5	5	5	4	5	2	-	-	26	26
		Jiří Mlynář	8. PORG	5	5	5	4	2	5	-	-	26	26
	11.–13.	Alžběta Reitmayerová	9. GSPP	5	5	4	3	5	3	4	-	26	26
		Kateřina Tesař	9. NPRG	5	5	5	5	3	3	-	-	26	26
		Robin Tesař	9. GCDP	5	5	5	4	5	2	-	-	26	26
23.–25.	5.	Vít Lukavský	8. ZMNK	5	5	5	-	5	5	-	-	25	25
	14.–15.	Pavčina Petrželová	9. GJKP	5	5	5	5	1	2	3	-	25	25
		Josefína Svatušková	9. PORG	5	5	5	5	2	3	-	-	25	25
26.–29.	5.–6.	Adam Kozák	7. ZTRE	5	5	5	4	2	3	1	-	24	24
		Bedřich Škop	7. GMSP	4	5	5	-	5	5	-	-	24	24
	6.–7.	Sofie Kaucká	8. GOPG	5	5	5	5	-	3	1	-	24	24
		Mikuláš Krubner	8. GBEN	5	5	-	4	4	3	3	-	24	24
30.–36.	2.–3.	Antonín Červený	6. GCDP	5	5	5	-	3	5	-	-	23	23
		Maxmilian Čovan	6. GJKP	5	5	5	5	3	-	-	-	23	23
	7.–8.	Agnes Dostálová	7. GMNP	5	5	5	5	-	3	-	-	23	23
		Petr Kysela	7. GCKR	5	5	2	-	5	3	3	-	23	23
	8.	Eva-M. Migel	8. GNAP	5	2	3	5	-	3	5	-	23	23
	16.–17.	Tomáš Blahout	9. GCHE	4	5	5	5	1	3	-	-	23	23
Mariana Warausová		9. GKSP	5	5	5	3	2	3	-	-	23	23	
37.	9.	Nikolas Doležal	8. ZKYS	5	5	3	3	3	3	2	-	22	22

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	1	2	3	4	5	6	7	P	σ	Σ
38.–39.	9.	Adéla Manová	7. GLPP	5	5	5	2	2	2	2	-	21	21
	10.	Matěj Matyáška	8. ZKON	4	5	3	4	2	3	2	-	21	21
40.–49.	1.	Marek Houfek	5. ZCHP	4	5	4	5	2	-	-	-	20	20
	4.	Jakub Zelenka	6. GRIC	5	5	5	1	1	2	2	-	20	20
	10.–13.	Pavčina Břízová	7. GTNV	5	5	5	-	-	5	-	-	20	20
		Adam Donát	7. GCDP	5	5	5	-	-	5	-	-	20	20
		Ján Minárik	7. GABP	5	5	4	3	-	3	-	-	20	20
		Martina Vojteková	7. PORG	5	5	5	5	-	-	-	-	20	20
	11.–12.	Jan Daniel Elleder	8. PORG	5	5	5	-	5	-	-	-	20	20
		Jakub Hrabálek	8. ZSJN	5	5	5	-	5	-	-	-	20	20
	18.–19.	Matěj Pavlok	9. ZERM	5	5	5	5	-	-	-	-	20	20
		Jitka Stejskalová	9. ZNDC	4	2	5	5	2	2	2	-	20	20
50.–53.	5.–6.	Jonas Koucky	6. GJKP	5	5	4	-	-	5	-	-	19	19
		Karolína Tarant	6. NPRG	5	5	3	3	1	1	2	-	19	19
	13.	Radka Valkovičová	8. ZOKZ	5	5	3	-	3	3	-	-	19	19
	20.	Marek Nechvátal	9. PORG	5	5	5	4	-	-	-	-	19	19
54.–57.	7.	Victoria Bartůňková	6. ZMAC	2	5	3	2	3	3	2	-	18	18
	14.	Vlastimil Straka	7. ZTRE	5	2	1	3	2	3	3	-	18	18
	14.	Petr M. Grametbauer	8. ZLOP	2	4	5	1	3	2	2	-	18	18
	21.	Jana Malkovská	9. ZGUP	5	5	4	-	4	-	-	-	18	18
58.–59.	15.	Hana Korejsová	7. ZPSP	5	4	4	-	1	3	-	-	17	17
	15.	Matěj Kiapeš	8. ZKON	5	4	4	-	1	3	-	-	17	17
60.–62.	16.–17.	Karel Olšar	7. GCKR	5	5	4	-	-	2	-	-	16	16
		Vojtěch Pešl	7. PORG	1	5	2	4	2	-	2	-	16	16
	22.	Gleb Baulin	9. GPKV	5	5	-	3	-	3	-	-	16	16
63.–72.	18.–21.	Richard Bechera	7. GRIC	5	5	5	-	-	-	-	-	15	15
		Magdaléna Pelikánová	7. GBUP	5	5	5	-	-	-	-	-	15	15
		Alžběta Pelikánová	7. GBUP	5	5	5	-	-	-	-	-	15	15
		Jaroslav Posch	7. GMKR	-	5	5	-	3	-	2	-	15	15
	16.–17.	Kristian Poljak	8. GPRE	5	5	5	-	-	-	-	-	15	15
		Dorota Slamková	8. GOHR	5	4	-	-	2	2	2	-	15	15
	23.–26.	Barbora Bouchnerová	9. GJKP	5	5	-	5	-	-	-	-	15	15
		Šimon Pelák	9. PORG	5	5	3	-	2	-	-	-	15	15
		Jakub Pešl	9. PORG	5	4	4	-	-	-	2	-	15	15
		Jan Rosík	9. ZSPP	5	5	-	-	-	5	-	-	15	15
73.	18.	Matteo Dalrymple	8. ZSBR	2	4	1	3	2	1	-	-	13	13
74.–76.	8.–9.	Dominik Holtan	6. GMSP	-	5	4	-	2	-	-	-	11	11
		Patrik Nedvěd	6. ZSTD	-	-	4	1	1	2	3	-	11	11
	19.	Karel Kanický	8. ZKYS	5	3	1	-	-	2	-	-	11	11
77.–79.	2.	Anna Menšíková	5. ZBJP	5	-	5	-	-	-	-	-	10	10
	20.	Jan Foldyna	8. ZAJP	5	5	-	-	-	-	-	-	10	10
	27.	Františka Cindrová	9. GJKP	5	-	5	-	-	-	-	-	10	10
80.	21.	Lenka Pulkrábková	8. ZBOB	2	1	1	2	1	2	-	-	9	9
81.	22.	Vojtěch Bárta	7. GLIP	5	-	3	-	-	-	-	-	8	8

Pikomat MFF UK, 40. ročník, 1. série

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	1	2	3	4	5	6	7	P	σ	Σ
82.	23.	Robert Faltys	7. ZLUZ	1	2	2	2	-	-	-	-	7	7
83.	28.	Jonáš Dinga	9. PORG	5	-	-	-	-	-	-	-	5	5
84.	10.	Viktoriia Anisimová	6. ZLUZ	2	2	-	-	-	-	-	-	4	4
85.	22.	Sebastian Mlích	8. GMOP	-	-	-	-	-	-	3	-	3	3
86.	23.	Marie Hošková	8. GABP	-	-	2	-	-	-	-	-	2	2
87.-88.	29.	Elena Šlaisová	9. ZMEC	1	-	-	-	-	-	-	-	1	1