

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

Vánoce a s nimi i nový rok se blíží, a my pro vás k tomu máme zadání třetí série 40. ročníku Pikomatu. Ta má termín odevzdání 13. 1. 2025, tedy ji můžete řešit i přes vánoční prázdniny. V tomto letáku najdete zadání třetí série a vzorová řešení úloh první série.

Soustředění

O víkendu 18. – 20. 10. proběhlo v ADCM Nazaret soustředění Pikomatu junior. S Bobem a Bobkem jsme hledali ztracená zvířata ze ZOO, přičemž nechyběly hry, přednášky ani skákací hrad. Další podobné soustředění se bude konat od 28. února do 2. března.

Pikoúterý

V průběhu tohoto školního roku se konají pravidelně každý týden v úterý na karlínském Matfyzu setkání. Řešitelé jak Pikomatu Junior, tak Pikomatu Klasik se mohou těšit na různorodé matematické přednášky, strategické hry i deskovky se starými či novými přáteli. Neváhej se k nám přidat na některém Pikoúterý v Karlíně od 17:20 hodin!

Přejeme vám krásné svátky a do nového roku mnoho zajímavých úloh.

Vaši organizátoři

Zadání příkladů 3. série 40. ročníku Pikomatu Junior

Termín odeslání: 13. ledna 2025



Odevzdej přes QR kód

Příklad č. 1: *V následující úloze spočítejte hodnoty všech útvarů a dopočítejte otazník tak, aby seděly vodorovné i svislé součty. Pokud nespočítáte všechny, odevzdejte jen část, kterou jste zvládli.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigcirc & + & \square & + & \bigcirc & + & \triangle = ? \\
 + & & + & & + & & +
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square & + & \diamond & + & \bigcirc & + & \triangle = 17 \\
 + & & + & & + & & +
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \triangle & + & \square & + & \square & + & \square = 19 \\
 + & & + & & + & & +
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \diamond & + & \diamond & + & \diamond & + & \diamond = 20 \\
 = & & = & & = & & =
 \end{array}$$

17

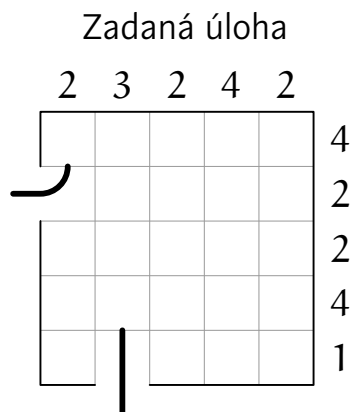
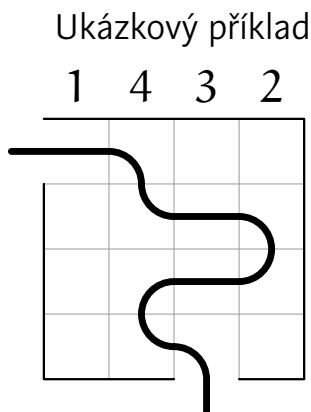
18

11

23

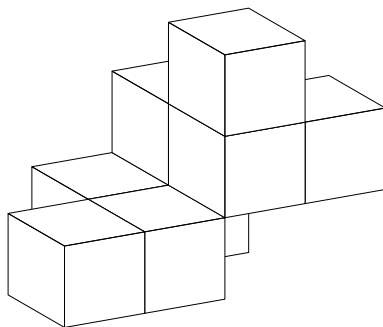
V této úloze chceme řešení a stručný postup.

Příklad č. 2: V této úloze je cílem nakreslit cestu tabulkou, přičemž smíme procházet jen stranami, máme určené oba konce a součty, kolik políček na daném sloupci či řádce projdeme. Podle ukázkového příkladu analogicky vyřešte zadanou úlohu.



V této úloze nás zajímá pouze řešení.

Příklad č. 3: Máme neomezeně mnoho útvarů jako na obrázku (všechny jsou stejně velké a jsou to slepence osmi krychlí). Úkolem je s jejich pomocí vytvořit nekonečného hada, širokého 4×5 , který bude celý vyplněný a nebude z něho nic přečuhovat.

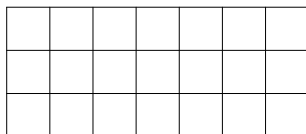


Zadaný útvar (máme jich neomezeně)

V této úloze chceme dobře popsanou konstrukci, případně zdůvodnění, proč takového hada nejde vytvořit.

Příklad č. 4: V následujícím textu doplňte chybějící slova.

Podívejme se na následující obrázek:



Tento obdélník má délky stran 3×7 .

Kdybychom chtěli zjistit počet čtverečků uvnitř tohoto obdélníku, řekli bychom, že počítáme jeho obsah. Ten spočítáme vynásobením počtu řádků počtem sloupců v obdélníku. Tento obdélník má tedy obsah čtverečků.

Když násobíme dvě čísla, můžeme zjistit, jaký obsah má obdélník, jehož délky stran odpovídají těmto dvěma číslům. Například když potřebujeme vynásobit $4 \cdot 6$, můžeme si nakreslit obdélník o stranách a

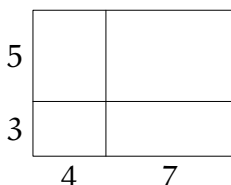
Obecně můžeme říci, že pokud má obdélník strany délek x a y , jeho obsah je

Závorky nám říkají, které operace máme provést přednostně. Například když počítáme $(2 + 3) \cdot (4 + 5)$, nejprve příslušná čísla sečteme a až pak je vynásobíme. $(2 + 3) \cdot (4 + 5) = 5 \cdot 9 = 45$

K tomuto výsledku dojdeme i jinak. Můžeme to spočítat jako

$$2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 8 + + 12 + =$$

Podobný příklad si můžeme ukázat i na obdélníku.



Obsah velkého obdélníku si můžeme rozdělit na obsahy čtyř menších obdélníků. Pak spočítáme obsahy čtyř menších obdélníků zvlášť. Poté bychom tedy obsah většího obdélníku spočítali jako

$$(3 + 5) \cdot (4 + 7) = \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Tento způsob využíváme, když hodnoty čísel v závorce neznáme. Např. $(x + 2) \cdot 6 = \dots$

Zadání: Roznásobte $(x-4) \cdot (y + 5)$.

Řešení: Roznásobíme si jednotlivé členy jako výše, ale využijeme toho, že záporné číslo násobené kladným číslem je záporné číslo. Tedy $(x-4) \cdot (y + 5) = x \cdot y + (-4) \cdot y + x \cdot \dots + (-4) \cdot \dots = \dots - 4 \cdot y + \dots - \dots = \dots$

Pokud násobíme stejné číslo několikrát za sebou, můžeme to zapsat pomocí tzv. mocnin. Pokud například násobíme dvojku třikrát za sebou, zapisujeme to jako 2^3 („dva na třetí“). To je pak $2 \cdot 2 \cdot 2 = \dots$

Takto můžeme zapsat i neznámé. Např. $x \cdot x = x^2$. Nebo

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = \dots$$

Využít toho lze i při roznásobování závorek:

$$(x + 5) \cdot (x - 3) = \dots$$

Příklad č. 5: Roznásobte

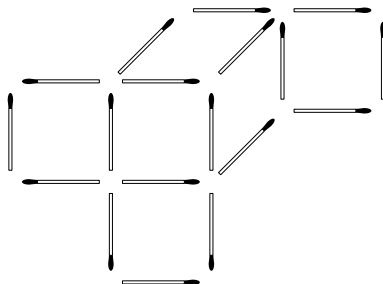
$$(x + 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 6).$$

V této úloze chceme řešení i postup (který se může podobat řešení v předchozí úloze).

Vzorová řešení a komentáře Pikomatu Junior k 1. sérii příkladů

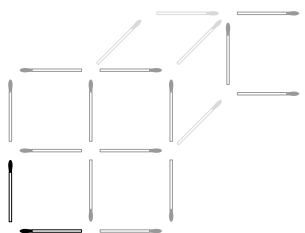
Příklad č. 1

Přesuňte dvě sirky tak, aby vzniklo alespoň šest čtverců.

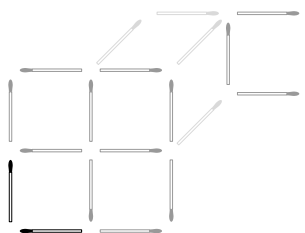


Řešení: Úloha měla hned několik různých řešení, která máte k dispozici níže. K řešení úlohy si musíme uvědomit, že úlohu řešíme v rovině (sirky nespojené), tedy čtverce jsou útvary s pouze čtyřmi vnitřními pravými úhly a stranami s rovnocennou délkou. Klíčové pro nás je si také uvědomit, že čtverce navzájem nemusí být stejné velikosti a mohou se překrývat. Teď už pro vyřešení úlohy stačí pouze párkrát zkusit sirky přeskládat a správně najít/spočítat v útvaru alespoň 6 čtverců :).

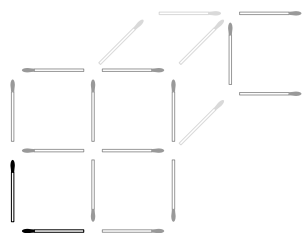
1. řešení



2. řešení



3. řešení



Komentář pro řešitele: Většina řešitelů si s touto úlohou, kterou bych neoznačila za lehkou, poradila výborně. Velmi oceňuji

všechna řešení, která nastínila více řešení a nacházela nové, originální, konstrukce. Jako opravovatel bych řekla, že i přestože některá řešení měla menší chyby, tak všechna došla řešení byla zdařilá a ráda bych všem řešitelům tímto pogratalovala! Většina menších chyb vznikla záměnou rovnoběžníků za čtverce (a tedy následným špatným počtem čtverců v řešení) nebo bezdůvodným řešením úlohy v prostoru místo v rovině. Všechny chyby tedy nebyly fatální a můžeme se z nich poučit do příště. Děkuji za všechna řešení!

Komentář pro rodiče/učitele: Velmi se mi líbilo a oceňuji, jak někteří rodiče poskytli svým dětem sirky a pevnou plochu v procesu hledání konstrukce, což muselo být jistě velice nápomocné, a doporučuji tedy v souladu s rozvíjením 3D představivosti jim nadále takto napomáhat.

Příklad č. 2

Máme tři hadice. Když napouštějí bazének samostatně, tak ho napustí první za 24 hodin, druhá také za 24 hodin a třetí za 12 hodin. Jak rychle bazének napustí, pokud ho budou napouštět najednou?

Řešení: Pokud dvě hadice napouštějí bazének stejně rychle, tak dohromady bazének napustí za poloviční čas. První a druhá hadice tak spolu napustí bazének za polovinu času oproti 24 hodinám, tedy za 12 hodin. První a druhá hadice spolu napouštějí bazének stejně rychle jako třetí hadice, tudíž můžeme aplikovat tentýž postup. První a druhá hadice pak spolu se třetí hadicí napustí bazének za polovinu oproti 12 hodinám, což je 6 hodin.

Pokud budou bazének napouštět všechny tři hadice najednou, napustí ho za 6 hodin.

Komentář pro řešitele: Úloha měla hodně druhů postupů, k nejlepším patřily ty obrázkové. Některé postupy obsahovaly rovnice.

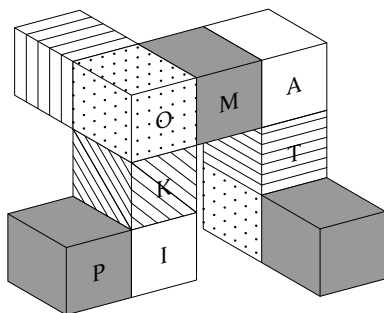
Ty pak vypadaly takto: $\frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{x}{12} = 1$. Výsledek je pak $x = 6$, kdy x je počet hodin, za jak dlouho se bazének naplní. Rovnicím se však ještě věnovat nemusíte, ty na vás čekají až v klasickém Pikomatu.

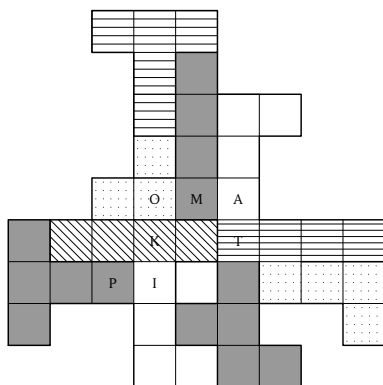
Komentář pro rodiče/učitele: Pokud mají děti problém si úlohu představit, můžete udělat pokus, kdy budete stopovat čas naplnění kyblíku. Nejprve kyblík napouštějte jednou hadicí. Poté to zkuste znova se dvěma. Porovnáním časů byste měli dojít k podobným výsledkům, jako jsou v úloze.

Příklad č. 3

Nakreslete síť útvaru včetně správně umístěných a otočených písmen napsaných na stěnách. Stěny se v nakreslené síti nesmí překrývat.

Řešení: Úloha měla spoustu řešení a řešitelé ji řešili velmi různými způsoby. Například čím začít, jak označovat přikryté stěny atd. Nemám myslím cenu jednotlivé postupy rozebírat, ale všechny chválím za tvořivost. Tady použijeme řešení, kdy si jednotlivé krychle obarvíme, abychom viděli, která stěna ke které krychli patří, a rovnou začneme celým nápisem pikomat.





Komentář pro řešitele: Chválím, jak jste si sestavování útvaru rozdělili na části a i těžkou úlohu jste zvládli.

Komentář pro rodiče/učitele: Tyto úlohy mají výhodu, že tolik nerozhoduje věk dětí (navíc i malé dítě dokáže vyřešit problém, který bude trvat i rodičům) a zároveň procvičují představivost, proto se je snažíme zadávat.

Příklad č. 4

V následujícím textu a následné úloze doplňte chybějící slova.

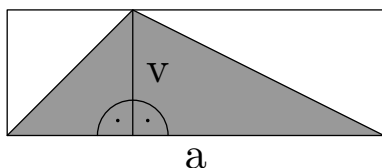
Řešení:

Obsahem útvaru rozumíme velikost plochy, kterou útvar zabírá. Většinou jej značíme S . Měříme jej ve čtverečních jednotkách, tedy například v cm^2 (centimetrech čtverečních).

Obsah obdélníku a čtverce lze zjistit jednoduše. Pokud má obdélník rozměry $a \times b$, tak zabírá plochu $a \cdot b$, a má tedy obsah $S = a \cdot b$. Například obdélník se stranami 3 cm a 4 cm má obsah 12 cm^2 .

S trojúhelníkem je to trochu složitější. Okolo trojúhelníku nakreslíme obdélník tak, aby jedna ze stran trojúhelníku byla stra-

nou obdélníku a zbývající vrchol ležel na protější straně. Náš trojúhelník si vybarvíme. Trojúhelník si výškou rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky. Tím jsme zároveň rozdělili obdélník na dva obdélníky. V každém obdélníku zabírá vybarvená část stejný obsah jako nevybarvená. Obsah našeho trojúhelníku je tedy poloviční oproti obsahu obdélníku, jehož obsah umíme spočítat jako $a \cdot b$. Obsah trojúhelníku je tedy obecně roven $(a \cdot v)/2$.



Výška trojúhelníku v je úsečka procházející jedním vrcholem kolmá na protější stranu.

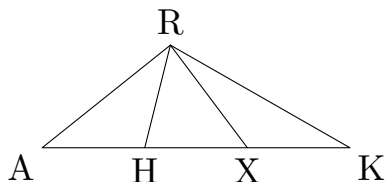
Teď si pomocí nově nabytých znalostí vyřešíme úlohu.

Zadání: Mějme trojúhelník RAK s obsahem 9 cm^2 . Ve třetině strany AK blíže k vrcholu K leží bod X . Zároveň na úsečce AX leží bod H tak, že obsahy trojúhelníků RAH a RHX jsou stejné. Urči obsah trojúhelníku RHX .

Řešení: Všimněme si, že trojúhelníky RAH a RHX mají stejnou výšku z bodu R , protože je to vždy kolmice z R na přímku AK . Obsah trojúhelníku RAH tedy můžeme napsat jako $(|AH| \cdot v)/2$ a obsah trojúhelníku RHX jako $(|HX| \cdot v)/2$. Zároveň víme, že tyto obsahy jsou stejné, proto i úsečky AH a HX jsou stejně dlouhé. Bod H tedy leží uprostřed AX . A tedy bod H je ve třetině AK blíže bodu A .

Všechny trojúhelníky RAH , RHX , $R XK$ mají stejnou výšku z vrcholu R a také jejich strany AH , HX a XK jsou stejně dlouhé.

Proto mají všechny tyto trojúhelníky stejný obsah. Obsah trojúhelníku RHX je tedy 3 cm^2 .



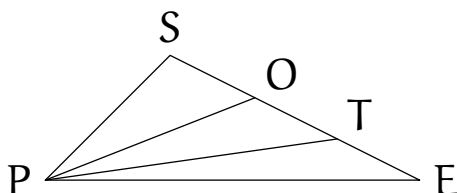
Komentář pro řešitele: Chválím všechny řešitele, kteří odeslali alespoň něco. Nebyla chyba, že někteří odeslali jen část, kterou pochopili (i tak úloha splnila účel), a připomínám, že pro sčítání bodů sourozenců je lepší psát řešení rukou.

Komentář pro rodiče/učitele: Zvládli jste to dobře, snad se děti naučily základy obsahů.

Příklad č. 5

Mějme trojúhelník PES s obsahem 24 cm^2 . V jedné třetině strany ES blíže bodu S leží bod O. Podobně ve čtvrtině strany ES blíže k bodu E leží bod T. Urči obsah trojúhelníku PTO.

Řešení:



Obsah trojúhelníku PES lze spočítat jako

$$\frac{|ES| \cdot v_{ES}}{2}$$

(délka strany ES krát výška na stranu ES, to celé děleno 2). Obsah trojúhelníku PTO je roven

$$\frac{|TO| \cdot v_{ES}}{2}$$

(délka strany TO krát výška na stranu ES, která je shodná s výškou na stranu TO, to celé děleno 2). To znamená, že v obou případech násobíme délku některé ze stran trojúhelníků stejnou výškou a dělíme stejným číslem. Strana TO trojúhelníku PTO zabírá

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

strany ES. Obsah trojúhelníku bude tedy roven $\frac{5}{12}$ krát obsah trojúhelníku PES.

$$S_{PTO} = \frac{5}{12} \cdot 24 = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}^2$$

Obsah trojúhelníku PTO je tedy roven 10 cm^2 .

Komentář pro řešitele: Většina řešitelů nejprve vypočítala obsahy trojúhelníků PET a PSO, které odečetla od celkového obsahu trojúhelníku PES. Jedná se o jedno z dalších hezkých řešení.

Komentář pro rodiče/učitele: V poslední úloze, která obvykle bývá návazná k úloze předešlé, je nutné psát vlastní postup (ne se pouze odkazovat na předchozí postup), i když může vycházet z textu 4. úlohy.

Úlohy první série opravovali a komentáře sepsali: 1. Tereza Kubínová, 2. Irena Bártová a Klára Pernicová, 3. Martin Hajkl a František Steinhauser, 4. František Steinhauser, 5. Eliška Vimmerová

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 1. sérii

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
1.-20.	1.	Šimon Slávik	1. PORG	5	5	5	5	5	-	25	25
	1.-2.	Radim Bridzik	3. ZBCP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Dora Nováková	3. ZMKP	5	5	5	5	5	-	25	25
	1.-4.	Anežka Dvořáková	4. ZSKP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Markéta Kyselová	4. ZVET	5	5	5	5	5	-	25	25
		Daniel Podruh	4. ZHEU	5	5	5	5	5	-	25	25
		Yelysei Tiahulskyi	4. ZSKP	5	5	5	5	5	-	25	25
	1.-8.	Karel Blažek	5. ZKHP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Šarlota Bouchnerová	5. ZGKK	5	5	5	5	5	-	25	25
		Tereza Feldbabelová	5. ZJEM	5	5	5	5	5	-	25	25
		Marek Houfek	5. ZCHP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Anna Kvapilová	5. GZHP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Anna Menšíková	5. ZBJP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Jakub Popule	5. ZKHP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Tereza Štrádalová	5. ZOLP	5	5	5	5	5	-	25	25
	1.-5.	Daniel Filipec	6. GMSP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Dexter David Nezveda	6. GMSP	5	5	5	5	5	-	25	25
		Evelína M. Sláviková	6. PORG	5	5	5	5	5	-	25	25
		Karolína Tarant	6. NPRG	5	5	5	5	5	-	25	25
		Adam Wint	6. NPRG	5	5	5	5	5	-	25	25
21.-24.	5.-6.	Slavomír Hrinko	4. ZBRP	5	5	4	5	5	-	24	24
		Vilém Vojtíšek	4. ZNCP	5	5	4	5	5	-	24	24
	9.	Kiara Kenderessy	5. ZMPB	5	5	4	5	5	-	24	24
	6.	Nataniel Kenderessy	6. ZKKO	5	5	4	5	5	-	24	24
25.-31.	1.	Kryštof Škudrna	0. GMSP	4	5	4	5	5	-	23	23
	3.	Alžběta Brothánková	3. ZMPB	5	5	5	3	5	-	23	23
	7.-8.	František Hejda	4. ZNCP	3	5	5	5	5	-	23	23
		Jolana Kaděrová	4. ZPOH	5	5	3	5	5	-	23	23
	10.-11.	Matyáš Salva	5. ZKRB	3	5	5	5	5	-	23	23
		Sofie Štrádalová	5. ZOLP	5	5	5	5	3	-	23	23
	7.	Marie Reitmayerová	6. GGJP	5	5	3	5	5	-	23	23
32.-36.	9.	Sofie Ručková	4. ZPOH	4	5	4	4	5	-	22	22
	12.-13.	Jindřich Gallovič	5. ZKHP	5	5	5	5	2	-	22	22
		Jan Svoboda	5. ZBRE	5	5	2	5	5	-	22	22
	8.-9.	Justyna Eliášová	6. GMOV	5	5	5	5	2	-	22	22
		Isabela Vacková	6. NPRG	4	5	5	5	3	-	22	22
37.-39.	4.	Herman Simonov	3. ZLTP	5	5	2	5	4	-	21	21
	14.	Filip Novotný	5. ZKHP	5	5	1	5	5	-	21	21
	10.	Elias Raffaele Addamo	6. NPRG	5	5	2	4	5	-	21	21
40.-44.	5.	Matěj Šrámek	3. ZMNK	5	5	-	5	5	-	20	20
	10.-12.	Karin Beneš	4. ZJMP	5	5	-	5	5	-	20	20
		Eliška Bumanová	4. ZPOH	5	5	-	5	5	-	20	20

Pikomat MFF UK, 40. ročník, 1. série

<i>Celkově</i>	<i>V roč.</i>	<i>Jméno a příjmení</i>	<i>Roč. a škola</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>P</i>	<i>σ</i>	<i>Σ</i>
40.–44.	10.–12.	Matěj Šplíchal	4. ZZBR	5	5	-	5	5	-	20	20
	15.	Antonín Stein	5. ZVEB	5	-	5	5	5	-	20	20
45.–48.	2.	Tereza Hübschová	1. ZVOP	5	5	4	5	-	-	19	19
	11.–13.	Antonín Veselý	6. ZSUC	5	4	2	5	3	-	19	19
		Sofia Votrubová	6. ZDBN	3	5	1	5	5	-	19	19
		Mariana Školařová	6. ZSBR	5	5	-	4	5	-	19	19
49.–50.	1.	Jakub Kvapil	2. GZHP	5	5	5	3	-	-	18	18
	13.	Anežka Vaňková	4. ZPOH	5	5	3	5	-	-	18	18
51.–52.	14.–15.	Zuzana Houfková	4. ZCHP	5	5	5	2	-	-	17	17
		Jakub Kapoun	4. ZHCE	4	5	2	3	3	-	17	17
53.–57.	16.–19.	Jakub Janota	4. ZPOH	5	5	3	3	-	-	16	16
		Václav Schaffer	4. ZDNV	5	5	3	3	-	-	16	16
		Josef Řehoř	4. ZMBP	5	5	-	3	3	-	16	16
		Václav Šafařík	4. ZVHP	3	2	2	5	4	-	16	16
	14.	Patrik Nedvěd	6. ZSTD	3	5	3	3	2	-	16	16
58.–62.	2.	Johana Vojtíšková	2. ZNCP	5	5	5	-	-	-	15	15
	6.–7.	Josef Blažek	3. ZKHP	5	5	5	-	-	-	15	15
		Jiří Ječmínek	3. ZSHB	5	5	-	5	-	-	15	15
	20.–21.	Filip Federič	4. ZLTP	5	5	-	5	-	-	15	15
		Matěj Trčka	4. ZEDP	5	5	-	2	3	-	15	15
63.	16.	Adam Dovica	5. ZZVP	5	5	-	4	-	-	14	14
64.	17.	Alžběta Machova	5. ZHCE	3	1	1	5	1	-	11	11
65.–70.	3.	Jonáš Kaděra	1. ZPOH	5	5	-	-	-	-	10	10
	8.–9.	Albert Chmelina	3. ZMEB	5	5	-	-	-	-	10	10
		Petr Vaněček	3. ZBUP	5	5	-	-	-	-	10	10
	22.–24.	Šimon Korvas	4. ZHEU	5	5	-	-	-	-	10	10
		Klára Posch	4. ZMRI	5	5	-	-	-	-	10	10
		Veronika Sladka	4. ZPOH	5	5	-	-	-	-	10	10
71.	10.	Ondřej Planeta	3. ZHAL	3	-	-	3	-	-	6	6
72.	11.	Vojtěch Stein	3. ZVEB	5	-	-	-	-	-	5	5