Matboj
Obůrka u Blanska, 2012

1. Terka vaří oběd a potřebuje si odměřit z plné devítilitrové nádoby třikrát tři litry do třech různých nádob. Nenašla v kuchyni odměrku, pouze nádoby o objemech 5, 4 a 2 litry. Pomůžete Terce vymyslet alespoň dva způsoby, jak má dospět k cíli na 6 přelití?

2. Dva hráči hrají hru. Do kruhu o poloměru 2012 mm vkládají kroužky o průměru 123 mm. Prohrává ten, kdo už nemůže vložit další kroužek. Najděte vyhrávající strategii pro začínajícího hráče.

3. Kláru zaujalo číslo, ale nepamatuje si o něm mnoho: končilo 6, pokud tuto poslední cifru zvětšíme o jedna a přesuneme na začátek, dostaneme číslo, které je šestkrát větší než původní číslo. Jaké číslo Kláru zaujalo?

4. Eva dostala od Míry úkol pokrýt šachovnici 3×7 kostičkami tvaru **L** ze tří čtverečků. Povede se jí to?

5. Péťa, Filip, Míra, Lucka se rozhodli jet na výlet pětimístným autem, ale Lucka neumí řídit. Každý den si chtějí sednout v autě nějak jinak, kolik dní mohou cestovat? Co když se přidá i Kája, která taky neřídí?

6. Lucka si zapsala pěticiferný násobek 72 na tabuli (kdo ví proč:)), ale někdo jí zlomyslně smazal první, třetí a pátou cifru. Teď jsou vidět na tabuli pouze dvě jedničky. Kolik různých čísel na tabuli mohlo být?

7. Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož pětina je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla a jeho čtvrtina je třetí mocninou nějakého (klidně jiného) přirozeného čísla.

8. Ukažte, že pro všechna a, b, c, $d \in \mathrm{N}$ platí, že
$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(d-c)$$
je dělitelné 12.

9. V rovině vybereme několik bodů s celočíselnými souřadnicemi. Spojíme je úsečkami a určíme středy těchto úseček. Kolik musíme vybrat bodů, aby jistě alespoň jeden střed úsečky měl celočíselné souřadnice?

10. Filip na svých procházkách po archeologicky zajímaých památkách potkal zajímavý symbol: čtverec $ABCD$, jemuž je vepsána kružnice k, a té je vepsán čtverec $EFGH$, kterému je vepsána kružnice l a té zase vepsán čtverec $IJKL$. Chce po vás, abyste mu vypočítali poměr obsahů čtverců $IJKL$ a $ABCD$.

11. Pokryjte dvanácti pentominovými útvary obdélník o rozměrech 3×20 čtverců.

12. Je dán čtverec $ABCD$ o délce strany 3 cm. Nad stranami AB, CD jsou rovnostranné trojúhelníky ADE, CDF, kde body E, F leží vně čtverce $ABCD$. Strany BC, DA jsou základny rovnoramenných trojúhelníků BCG, DAH, kde body G, H leží vně čtverce $ABCD$. A tyto rovnoramenné trojúhelníky mají třikrát větší obvod než již zmíněné rovnostranné trojúhelníky. Spočtěte obsah čtyřúhelníku $EGFH$.

13. Najděte největší násobek 16, v jehož zápise se neopakují cifry.

14. Olinka podává Terce dominové kostičky (dominová kostička má dvě políčka, na každé je číslo od nuly do šestky). Terka si zapíše vždy menší číslo z domina (pokud jsou stejné, nezapíše si nic). Nakonec čísla sečte, jaké číslo dostane? (dominová sada obsahuje všechny možnosti kostiček)

15. Zjednodušte:
$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+\ldots n\cdot 3n\cdot 9n}}$$
.

16. Mějme čísla a, b, $c\in \mathrm{N}$, platí $abc=2431$, $a^2+b^2+c^2=579$. Zjistěte $a+b+c$.

17. Kolik existuje pěticiferných čísel tvaru $ABCDE$, pro která platí, že $A<B<C<D<E$?

18. Péťa, Klára, Eva, Lucka se chtěly přesvědčit o tom, zda jsou lepší v pexesu než Filip, Míra, Viťas a Zbyňa. Hráli tedy turnaj. Každá holka hrála právě jednou proti každému z kluků. V 2. kole hráli proti sobě Filip s Klárou a Zbyňa s Luckou. V třetím Viťas s Evou, Míra a Klára. Ve 4. kole hrál Filip s Evou a Péťa s Mírou. Kdo hrál proti komu v prvním kole, pokud víme, že v každém kole probíhaly současně 4 zápasy?

19. Míra a Filip hrají hru. Na začátku mají oba stejný počet bodů. V prvním kole vyhrál Míra 20 bodů, ve druhém kole prohrál $\frac{2}{3}$ toho, co měl po prvním kole. Po dvou kolech měl Míra 4 krát méně než Filip. Kolik bodů měli Míra s Filipem dohromady?

20. Péťa si hrála s provázkem o délce 30 dm, jehož konce byly spojené. Vytvarovala z něho obdélník s celočíselnými délkami stran v decimetrech. Jaký největší obsah může obdélník mít?

21. * Rozdělte čtverec na 6 menších čtverců.

22. Pokryjte dvanácti pentominovými útvary čtverec 8×8 bez rohových čtverečků.

23. * Na kolik nejvíce a nejméně částí můžeme rozdělit kruh čtyřmi přímkami, které jej protínají ve dvou bodech?

24. V tajném městě nedaleko Obůrky žijí lidé, kteří pouze lžou, a lidé, kteří mluví pouze pravdu. Každý ze 400 obyvatel je buď traktorista, dřevorubec, nebo kuchař. Nikdo nedělá více než jedno povolání. Každý člověk dostal anketu o třech otázkách:

    (a) Jsi traktorista?
    (b) Jsi dřevorubec?
    (c) Jsi kuchař?

    Na první otázku odpovědělo ne 100 obyvatel. Na druhou otázku se objevilo 200 ne a na třetí otázku odpovědělo 150 obyvatel ano. Kolik tam žije lhářů?

25. Eva dostala do ruky pravítko, kružítko a tužku a od Filipa úkol. Měla rozdělit kruh na 7 shodných dílů. Pomůžete jí?

26. Na obvodu kruhu je 8 nul a 8 jedniček seřazeno tak, že všechny čtveřice po sobě jdoucích prvků ve směru hodinových ručiček jsou různé. Ukažte, že nikde na obvodu kruhu nenajdeme skupinu 10001.

27. Najděte 10 přirozených čísel, pro něž platí, že kdykoliv sečteme libovolných 9 z nich, dostaneme součty 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95.

28. Najděte nejmenší přirozené číslo dělitelné číslem 45, jehož ciferný součet tvoří samé číslice 1.

29. Máme 2 bílé a 3 černé čepice. Vybrali jsme 3 a nasadili je na hlavy 3 lidem sedicím za sebou (poslední vidí prvního a druhého, druhý vidí prvního, první nevidí nikoho). Poté jsme se zeptali třetího, zda ví, jaký klobouk má na hlavě. Odpověděl, že neví. Potom druhého, též nevěděl. Může první z předešlých odpovědí určit, jaký klobouk má na hlavě?

30. Najděte Kájino oblíbené číslo, pokud víte, že pro něj platí tato tvrzení:

    - Je-li násobkem dvou, pak je mezi $170 - 179$
    - Není-li násobkem tří, pak je mezi $180 - 189$
    - Není-li násobkem čtyř, pak je mezi $190 - 199$.

31. Cesta z Aritmetikánu do Geometristánu trvá lodí 23 hodin. V protisměru jezdí lodě v pravidelně se střídajících intervalech $1,5$ hod a 2 hod. Ovšem jejich cesta vede po proudu, tedy trvá o 3 hodiny méně. Kolik minimálně a maximálně lodí potkáme na této cestě, pokud se nepočítá případ, že jedna loď bude z místa odjíždět a druhá tamtéž přijíždět.

32. Deltoid je čtyřúhelník, v němž se rovnají délky některých dvou sousedních strn a zároveň se rovnají i délky zbylých dvou stran. Zkuste narýsovat deltoid $ABCD$, pokud víte, že trojúhelníku BCD lze opsat kružnici, přímky AB a AD mají s touto kružnicí jen jeden společný bod, $|AD| = 5$ cm a velikost úhlu BDA je $70°$.

33. Pokryjte dvanácti pentominovými útvary obdélník o rozměrech 5×12 čtverců.