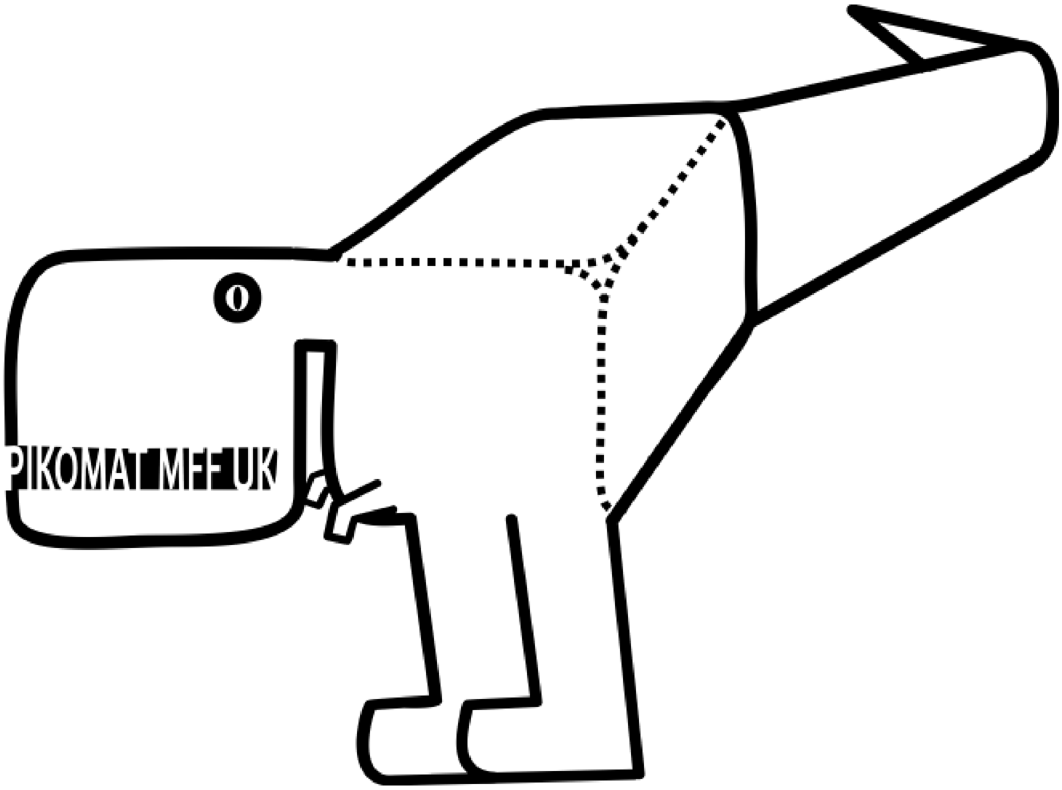



**SBORNÍK PŘEDNÁŠEK**

soustředění Pikomatu MFF UK
12. – 18. května 2013, Kunžak

# Tětivové čtyřúhelníky

**Anna Steinhauserová**

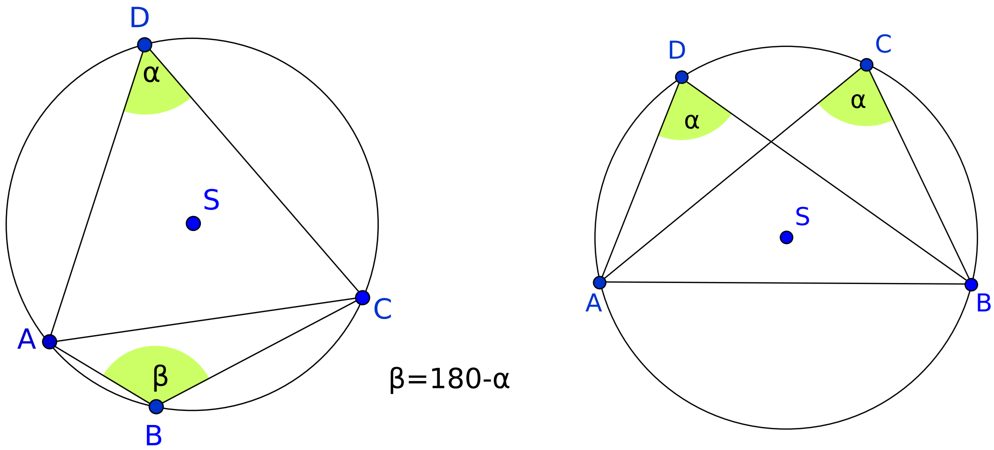
Seznámíme se s vlastnostmi tětivových čtyřúhelníků a spočítáme si pár příkladů. Přednáška bude zaměřená na olympiádní matematiku.

**Definice 1.** *Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když body $A$, $B$, $C$ a $D$ leží na jedné společné kružnici.*

## Vlastnosti

Všechny tětivové čtyřúhelníky mají společné vlastnosti, podle kterých je můžeme poznat:

1. Součet úhlů při protilehlých vrcholech je 180° (viz obrázek 1 vlevo).
2. Strana čtyřúhelníku $ABCD$ je vidět ze zbylých dvou vrcholů pod stejným úhlem (vyplývá z věty o obvodových úhlech, viz obrázek 1 vpravo).
3. Délky stran splňují rovnost: $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$.




Obrázek 1: Součet úhlů u protilehlých vrcholů, viditelnost úsečky.

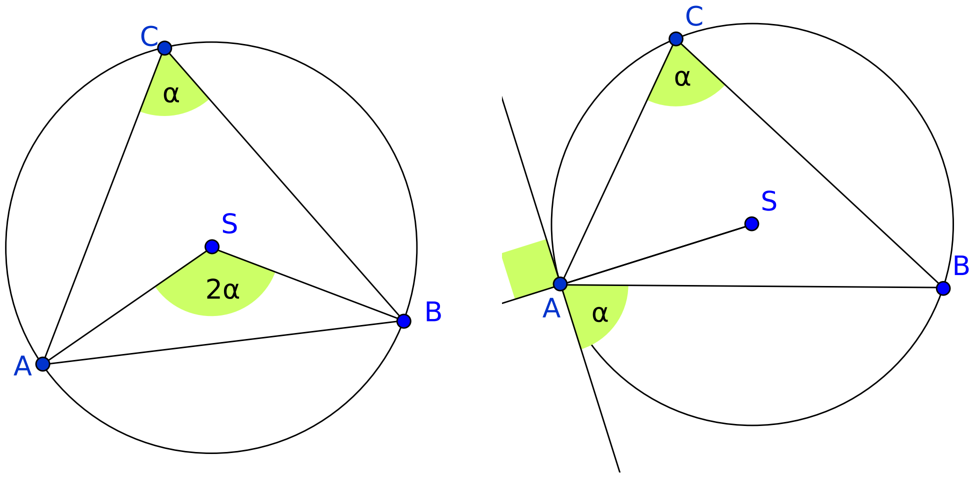
**Věta 1.** *(o obvodových a středových úhlech) Mějme kružnici se středem $S$, její tětivu $AB$ a libovolný bod $M$ na větším oblouku $AB$ (viz obrázek 2 vlevo). Úhel $ASB$ nazýváme středovým a $AMB$ obvodovým úhlem k příslušné tětivě $AB$. Platí, že úhel $|\angle ASB| = 2|\angle AMB|$.*

**Věta 2.** *(o úsekových úhlech) Mějme kružnici a na ní tětivu $AB$ (viz obrázek 2 vpravo). Veďme přímku, která se dotýká kružnice v bodě $A$. Odchylku $AB$ od $t$ nazveme úsekovým úhlem k tětivě $AB$. Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.*

**Příklad 1.** *Mějme čtyřúhelník ABCD. Dále platí: $|\angle BCD| = 120°$, $|\angle DAB| = 60°$. Dokažte, že tento čtyřúhelník je tětivový.*

**Příklad 2.** *Mějme čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém jsou úhly $CAB$ a $CDB$ stejné. Dokažte, že je tětivový.*

**Příklad 3.** *Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém se úhly $BCA$ a $ABD$ rovnají. Dokažte, že trojúhelník $ABC$ je rovnoramenný.*




Obrázek 2: Středové úhly, úsekové úhly.

**Příklad 4.** *Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$, kde úhel $DAB$ je pravý. Navíc platí $|\angle CDB| = 30°$. Zjisti velikost úhlu $DBC$ a velikost úsečky $DB$.*

**Příklad 5.** *Mějme kružnici $k$ opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Navíc platí, že $|\angle ACD| + |\angle CAB| = 90°$. Navíc průsečík jeho úhlopříček leží ve středu kružnice $k$. Dokažte, že $ABCD$ je čtverec.*

**Příklad 6.** *Mějme zadané dvě kružnice $k$ a $l$ s průsečíky $X$ a $Y$. Bodem $X$ veďme přímku, která protíná $k$ v bodě $A$ a $l$ v bodě $C$. Nyní bodem $Y$ veďme přímku, která protíná $k$ v bodě $B$ a $l$ v bodě $D$. Dokažte $AB \parallel CD$.*

**Příklad 7.** *Mějme zadané tři kružnice $k$, $l$ a $m$ procházející společným bodem $P$. Další průsečíky kružnic $k$,$l$; $l$,$m$; $k$,$m$ označme postupně $A$, $B$, $C$. Nyní zvolme na kružnici $k$ bod $K$ různý od $A$, $P$, $C$. Přímka $KA$ protne $l$ v bodě $L$ a přímka $LB$ protne $m$ v bodě $M$. Dokažte, že bod $C$ leží na přímce $KM$.*

## Literatura

`https://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`

## Iracionální čísla

**Filip Lux**

Na přednášce se dozvíte, co to jsou iracionální čísla, kdo je objevil, co je to Ludolfovo číslo, zlatý řez, odmocniny, konstrukce iracionálních čísel a jak se naučit zpaměti iracionální čísla.

**Definice 1.** *Iracionální čísla jsou taková čísla, která nejdou zapsat zlomkem ve tvaru* $\frac{a}{b}$*, kde* $a, b$ *jsou celá čísla. Dále je můžeme definovat jako čísla s neukončeným neperiodickým rozvojem. Definice jsou navzájem ekvivalentní, neboli říkají totéž.*

Asi nejznámějším iracionálním číslem je $\pi$, neboli Ludolfovo číslo. Na přednášce se dozvíte, kdo a kdy ho poprvé použil. Další iracionální čísla, která znáte, jsou například Eulerovo číslo e, zlatý řez, $\sqrt{2}$ nebo $\sqrt{3}$. Dozvíte se, jak poznat iracionální číslo a jak racionální s neukončeným rozvojem převést zpátky na zlomek. Na závěr přednášky si ukážeme, jak se dají některá iracionální čísla geometricky zkonstruovat.

**Příklad 1.** *Je číslo* $0{,}72$ *iracionální? Jestli ne, zapiš ho zlomkem.*

**Příklad 2.** *Je číslo* $0{,}\overline{3}$ *iracionální? Jestli ne, zapiš ho zlomkem.*

**Příklad 3.** *Je číslo* $2{,}\overline{15}$ *iracionální? Jestli ne, zapiš ho zlomkem.*

**Příklad 4.** *Je číslo* $\sqrt{2}$ *iracionální?*

**Příklad 5.** *Narýsuj úsečku dlouhou* $\sqrt{5}$*.*

**Příklad 6.** *Narýsuj dvě úsečky* $a, b$ *v poměru zlatého řezu.*

# Kvadratická rovnice

**Lucie Mohelníková**

Úkolem této přednášky je seznámit se s řešením kvadratických rovnic, odvodit počet řešení v závislosti na hodnotě diskriminantu a porovnat výsledky úloh s řešením, které dostaneme, použijeme-li k vypočítání kořenů kvadratické rovnice Vièetovy vztahy.

**Definice 1.** *Rovnice o jedné neznámé, ve které neznámá vystupuje ve druhé mocnině,* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$*, se nazývá kvadratická rovnice. Člen* $ax^2$ *se nazývá kvadratický,* $bx$ *lineární a* $c$ *absolutní.*

**Definice 2.** *Normovaný tvar kvadratické rovnice:* $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

## Řešení neúplných kvadratických rovnic

Neúplná kvadratická rovnice je taková, kde $b = 0$ nebo $c = 0$.

- Dosadíme-li do kvadratické rovnice za lineární člen $b = 0$, dostáváme: $ax^2 + c = 0$. Řešení v oboru reálných čísel existuje pouze tehdy, pokud $-\frac{c}{a} \geq 0$: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Nyní dosadíme za absolutní člen $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$, resp. $x(ax + b) = 0$. Řešením je $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{b}{a}$.

**Příklad 1.** *Vyřešte následující kvadratické rovnice:*

- $-100x^2 + 64 = 0$,
- $3x^2 + 6x = 0$.

## Odvození vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

Začneme s normovaným tvarem kvadratické rovnice $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Chceme, aby součet na levé straně rovnice byl druhou mocninou nějakého reálného čísla. Upravíme ho s pomocí vzorečku $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Docílíme toho tak, že druhý člen rovnice rozšíříme číslem 2 a přičteme a odečteme $\left(\frac{b}{4}\right)^2$:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0,\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) &= 0,\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}\right)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Pomocí $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ upravíme na $\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}\right) = 0$. Abychom mohli vyřešit tuto rovnici v součinovém tvaru, musí být buď první závorka rovna nule, nebo druhá:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**Definice 3.** *Pro kvadratickou rovnici* $ax^2+bx+c=0$ *je diskriminant* $D=b^2-4ac$. *Diskriminant rozhoduje o počtu a násobnosti řešení kvadratické rovnice:*

- $D>0$*: rovnice má* 2 *různé kořeny* $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,
- $D=0$*: rovnice má* 1 *dvojnásobný kořen* $x_1=x_2=-\frac{-b}{2a}$,
- $D<0$*: rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.*

**Příklad 2.** *Řešte tyto kvadratické rovnice:*

- $2x^2+5x-3=0$,
- $-x^2+4x-4=0$,
- $x^2+4x+10=0$.

### Viètovy vztahy

Sečteme-li a vynásobíme-li kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, dostaneme Viètovy vztahy (pojmenováno na počest francouzského matematika):

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a},$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

**Poznámka 1.** *Dokazuje se sečtením (resp. vynásobením) kořenů kvadratické rovnice.*

**Příklad 3.** *Rovnice z příkladu 2 vyřešte pomocí Viètových vztahů.*

## Literatura

http://www.matweb.cz/kvadraticke-rovnice

## Pythagoras

**Lucie Mohelníková**

### Opakování – Pythagorova věta

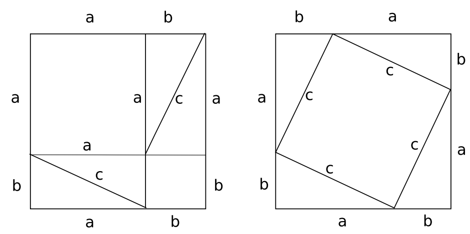
**Věta 1.** *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou (nejdelší stranou) pravoúhlého rovinného trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami (dvěma kratšími stranami):*

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

*kde $c$ označuje délku přepony pravoúhlého trojúhelníku a délky odvěsen jsou označeny $a$ a $b$.*

*Důkaz.* Uvedeme si dva různé důkazy Pythagorovy věty:

- Grafický důkaz: Čtverec o straně $a + b$ můžeme složit dvěma způsoby jako na obrázku 3. Buď ze 4 pravoúhlých trojúhelníků a dvou čtverců o stranách délky $a$ a $b$, nebo ze 4 pravoúhlých trojúhelníků a jednoho čtverce o straně $c$.




Obrázek 3: čtverce o straně $a + b$

- Obsah celého čtverce můžeme vyjádřit 2 způsoby:

  1. $S = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ (plyne z obrázku 3).
  2. Čtverec je tvořen 4 pravoúhlými trojúhelníky (s obsahem $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2ab$) a čtvercem o straně $c$ (viz obrázek 3). Celkový obsah: $S = 2ab + c^2$.

  Dostali jsme dvakrát vyjádřený obsah jednoho čtverce, proto můžeme oba výrazy porovnat:
  $$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

□

**Příklad 1.** *Obdélníkové náměstí má délky stran 30 a 40 metrů. Kolik metrů bude měřit cesta, která povede po úhlopříčce náměstí rovně z jednoho rohu do druhého?*

### Pythagorejské trojice

**Definice 1.** *Pythagorejská trojice $(a, b, c)$ je uspořádaná trojice přirozených (celých) čísel, která jsou řešením rovnice $a^2 + b^2 = c^2$. Redukovaná Pythagorejská trojice je takové řešení, kde jeho složky jsou nesoudělné ($NSD(a, b, c) = 1$).*

**Tvrzení 1.** *Trojice $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ je redukovaná trojice právě tehdy, když $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$, kde $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v > 1$, $NSD(u, v) = 1$ a $u, v$ nemají stejnou paritu.*

*Důkaz.* "$\Leftarrow$:" Za $a$, $b$ a $c$ dosadíme příslušné výrazy:

- Levá strana rovnice: $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2)^2 + 2u^2v^2 + (v^2)^2$.
- Pravá strana rovnice: $(u^2 + v^2)^2 = (u^2)^2 + 2u^2v^2 + (v^2)^2$.

Z toho plyne, že levá strana rovnice se rovná pravé. Z podmínek na $u$ a $v$ je vidět, že dostaneme redukovanou Pythagorejskou trojici.
"$\Rightarrow$:" Nechť $(a, b, c)$ je redukovaná Pythagorejská trojice a nechť $a$ je liché a $b$ je sudé. Rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ upravíme do tvaru $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2}$, $NSD(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}) = 1$. Z jednoznačnosti prvočíselného rozkladu plyne, že $\frac{c-a}{2}$ i $\frac{c+a}{2}$ jsou čtverce (druhé mocniny).
Označme $v^2 := \frac{c-a}{2}$ a $u^2 := \frac{c+a}{2}$. Potom $\frac{c-a}{2} + \frac{c+a}{2} = c \Rightarrow u^2 + v^2 = c$ a $\frac{c-a}{2} - \frac{c+a}{2} = a \Rightarrow u^2 - v^2 = a$. Vyjádříme si $b = \sqrt{4 \cdot \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2}} = \sqrt{4u^2v^2} = 2uv$.
Nyní ještě musíme ověřit:

1. $u, v \in \mathbb{N}$,
2. $u > v > 1$,
3. $NSD(u, v) = 1$.

$\square$

**Příklad 2.** *Najděte nejmenší redukovanou Pythagorejskou trojici.*

### Poslední (Velká) Fermatova věta

S Pythagorejskými trojicemi souvisí Poslední Fermatova věta, která říká, že $x^n + y^n = z^n$ nemá řešení $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ $\forall n > 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tato věta patří mezi nejtěžší v teorii čísel a na svůj důkaz čekala až do roku 1994, kdy byla dokázána matematikem Andrew Wilesem.

**Tvrzení 2.** *Rovnice $x^4 + y^4 = z^2$ pro $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ nemá řešení.*

### Literatura


`http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/UTC12.html`

## Invarianty

**Lukáš Zavřel**

Motivační příklad

Proveďme experiment. Napište si do sešitu šest nul a pět jedniček, dohromady tedy jedenáct čísel. Nyní si vyberte libovolná dvě čísla a škrtněte je. Pokud byla stejná, napište místo nich nulu, pokud byla rozdílná, napište místo nich jedničku. Po deseti krocích nám zbyde jediné číslo. Vyjde toto číslo všem stejně? A čím to je?
Podobně jako u prvního příkladu se celou přednášku budeme snažit hledat něco, co se vůbec nemění, tedy nějaké invarianty. Nejčastěji dostaneme nějaký objekt a operace s ním a úloha se nás bude ptát, zdali tento objekt umíme převést na objekt jiný jen za pomocí těchto operací. A protože budeme využívat něco, co se nemění, tak nejčastěji dokážeme spor, tedy že pomocí daných operací druhý objekt nezískáme. Pojďme si tuto metodu vyzkoušet na dalších příkladech.

**Příklad 1.** *Mějme speciální jazyk Ao – Ao skládající se pouze z písmen A,O, splňující tyto podmínky: Pokud smažeme dvě sousední písmena AO z libovolného slova, dostaneme slovo, které má ten samý význam. Podobně se nezmění význam slova, pokud na jeho libovolné místo vložíme skupinu písmen AO či OOAA. Můžeme si být jisti, že slova AOO a OAA mají ten samý význam?*

**Příklad 2.** *Mějme na tabuli napsaná čísla* $1,\ 2,\ 3, \dots,\ 19,\ 20$. *Je povolena operace, která smaže čísla* $a,\ b$ *a místo nich napíše číslo* $a + b - 1$. *Které číslo může zbýt na tabuli po devatenácti takových operacích?*

**Příklad 3.** *(Minulý leč obměněný) Mějme na tabuli napsaná čísla* $1,\ 2,\ 3, \dots,\ 19,\ 20$. *Je povolena operace, která smaže čísla* $a,\ b$ *a místo nich napíše číslo* $ab + a + b$. *Které číslo může zbýt na tabuli po devatenácti takových operacích? Nápověda: Přemýšlejte nad tím, co dostaneme, pokud vynásobíme dvě čísla zvětšená o jedničku.*

**Příklad 4.** *V aleji bylo šest stromů v jedné řadě, přičemž vzdálenost mezi každými dvěma sousedními stromy byla* 10 *metrů. Na každém stromě seděla jedna vrána. Pokud jedna vrána vzlétne a přesedne si na nějaký jiný strom, tak v tom okamžiku vzlétává druhá vrána, která uletí přesně tolik metrů jako první vrána, ovšem v opačném směru a taktéž si sedne na strom. Je možné, aby po nějaké době seděly všechny vrány na jednom stromě? A co pokud máme stromů a vran sedm?*

**Příklad 5.** *(Šachovnice) Na šachovnici* $8 \times 8$ *je jeden čtvereček obarvený černě a všechny ostatní jsou obarveny bíle. Ukažte, že šachovnice nemůže nikdy být obarvena pouze jednou barvou, pokud přebarvujeme pouze sloupce či řádky. Přebarvení je operace, která změní všechny barvy v jednom řádku či v jednom sloupci.*

**Příklad 6.** *Na barevném ostrově žilo* 13 *šedých,* 15 *hnědých a* 17 *červených chameleonů. Když se potkají dva chameleoni různých barev, oba dva změní barvu na tu třetí. (Tedy pokud se potkají hnědý a šedý, oba dva se stanou červenými.) Je možné, že po nějakém čase na ostrově zůstanou chameleoni pouze jedné barvy?*

Zbytky po dělení jako invarianty

**Příklad 7.** *Princ Filip má dva magické meče. Jedním umí useknout najednou* 21 *hlav zlého draka a druhým umí useknout najednou* 4 *hlavy, ovšem ihned poté naroste drakovi nových* 1 985 *hlav. Může takto useknout Filip všechny hlavy, pokud na začátku bojoval proti stohlavému drakovi? Poznámka: Pokud má drak například tři hlavy, Filip nemůže použít ani jeden meč.*

**Příklad 8.** *V zemích Dillia a Dallia mají dvě platidla – diller a daller. V Dillii byl směnný kurs* 10 *dillerů za jeden daller a v Dallie byl směnný kurs* 10 *dallerů za jeden diller. Manažer má na začátku jeden diller a může volně cestovat a směňovat bez jakýchkoli poplatků. Dokažte, že pokud nebude utrácet, tak nikdy nemůže mít stejný počet dillerů jako dallerů.*

Těžší problém na závěr:

**Příklad 9.** *Mějme tři speciální tiskárny, do kterých se vkládají karty se dvěma čísly* $(a, b)$. *První vrátí po vložení této karty kartu s čísly* $(a + 1, b + 1)$. *Druhá akceptuje pouze karty se dvěma sudými čísly a vrací kartu* $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. *Poslední akceptuje dvě karty* $(a, b)$, $(b, c)$ *a vrací kartu* $(a, c)$. *Všechny tiskárny zároveň vrací vložené karty. Je takto možné získat kartu s čísly* $(1, 1989)$, *pokud jsme původně měli kartu s čísly* $(5, 19)$*?*

## Literatura

*Mathematical Circles (Russian Experience)*

## Dirichletův princip

**Lukáš Zavřel**

Úvodní problém

Mějme pytlík se dvěma druhy kuliček – duhové a hliněné. Kolik musíme z pytlíčku nejméně vytáhnout kuliček, abychom měli jistotu, že vytáhneme alespoň dvě stejné?

Právě jsme si spočítali první úlohu na tuto problematiku, které se tak vznešeně říká Dirichletův princip. Neříká nám vlastně vůbec nic jiného než to, že pokud dáme do devíti důlků deset kuliček, tak alespoň v jednom důlku jsou alespoň dvě kuličky, což je jasné už i malému dítěti. Pojďme si tedy spočítat několik příkladů, na kterých uvidíme, jaké toto tvrzení má krásné důsledky.

**Příklad 1.** *Praha má více než* 1,2 *milionu obyvatel. Víme, že neexistuje člověk, který by měl více jak milion vlasů. Ukažte, že v Praze bydlí dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů.*

**Příklad 2.** *Terka má doma na zdi napsaných dvanáct čísel. Dokáže si z nich vybrat dvě takové, že jejich rozdíl je dělitelný jedenácti?*

**Příklad 3.** *(Varovný) Míra má čtyři různé barvy svých ponožek. Vlastní tři páry žlutých, pět párů červených, dva oranžové a jediný pár růžových ponožek. Protože si je ale nerad skládá, má je nepopárované hozené v šuplíku. V pátek ráno vstával ještě za tmy, a tak vůbec neviděl, jaké ponožky si vytahuje. Kolik musí minimálně vytáhnout kusů ponožek, aby měl jistotu, že mezi nimi bude alespoň jeden pár červených ponožek?*

**Příklad 4.** *U kulatého stolu sedí rovnoměrně sto lidí, z čehož více jak půlka jsou ženy. Ukažte, že pak existují dvě ženy, které sedí přímo naproti sobě.*

**Příklad 5.** *Ukažte, že v každé skupině pěti lidí je alespoň jedna dvojice, která v této pětici zná stejný počet lidí. Poznámka: „Znát se“ je symetrické, tedy pokud Adam zná Bedřicha, musí i Bedřich znát Adama.*

**Příklad 6.** *Mějme osm různých přirozených čísel menších než* 16. *Ukažte, že můžeme vybrat tři dvojice čísel tak, že jejich rozdíl v rámci dvojice bude stejný. Vybraná čísla se mohou opakovat, tedy pokud máme k dispozici čísla* 1, 2, 3, 4, *tak poté můžeme jako naše tři dvojice vybrat dvojice* $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 4)$.

Další zobecnění

Dirichletův princip se dá zesílit a znovu dostaneme velice zřejmě tvrzení říkající, že pokud máme 9 důlků a 19 kuliček, tak alespoň v jednom důlku budou alespoň tři kuličky. Toto pozorování opět využijeme u dalších příkladů.

**Příklad 7.** *Do obchodu nám přivezli* 25 *beden s jablky. Víme, že tato jablka jsou tří druhů a všechna jablka v každé krabici jsou vždy jednoho druhu. Ukažte, že nám dovezli alespoň devět krabic od jednoho druhu.*

**Příklad 8.** *Součet věků sedmi lidí v místnosti je* 332. *Dokažte, že pak umíme vybrat* 3 *lidi tak, že součet jejich věků je alespoň* 144.

A nyní trošku těžší kalibr.

**Příklad 9.** *Ukažte, že podíl* $a/b$ *má buď ukončený desetinný rozvoj, nebo periodu nejvýše* $b - 1$.

**Příklad 10.** *Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně* 10 *bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše* $\frac{a}{3}$. *Dokažte.*

**Příklad 11.** *Dokažte, že v každé skupině* 121 *čísel si můžeme vybrat několik z nich tak, že jejich součet je dělitelný číslem* 121.

**Příklad 12.** *Mějme libovolných deset čísel napsaných na papíře za sebou. Dokažte, že pak vynecháním některých čísel a vložením symbolů* $+$ *nebo* $-$ *mezi každé dvě po sobě jdoucí zbylá čísla lze získat číslo dělitelné číslem* 389.

## Literatura

*Mathematical Circles (Russian Experience)*

## Číselné soustavy

**Miroslav Koblížek**

**Definice 1.** *Nechť* $(a_k a_{k-1} \dots a_1)_n$ *je* $k$*-místné číslo zapsané v* $n$*-soustavě a* $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1$ *jsou jeho číslice splňující podmínku* $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1 \in \{0; \dots; n-1\}$*. Hodnota tohoto čísla v desítkové soustavě je*

$$a_k \cdot n^{k-1} + a_{k-1} \cdot n^{k-2} + \dots + a_1 \cdot n^0.$$

**Cvičení 1.** *Určete hodnoty následujících čísel:*

- $(123)_4$,
- $(1001)_2$,
- $(257)_7$,
- $(CD)_{16}$.

**Tvrzení 1.** *Převod zadaného čísla do* $n$*-soustavy lze provést tak, že dané číslo opakovaně dělíme* $n$*, přičemž zbytky po dělení postupně zapisujeme odzadu jako jednotlivé cifry čísla v* $n$*-soustavě. Je jasné, že právě všechny zbytky po dělení* $n$ *mohou být v* $n$*-soustavě reprezentovány jako jednotlivé číslice, neboť všechny náleží do množiny* $\{0; \dots; n-1\}$*.*

**Tvrzení 2.** *Druhou možností převodu do* $n$*-soustavy je odčítání největších možných násobků největší možné mocniny* $n$*. Máme-li převést číslo* $x$ *do* $n$*-soustavy, najdeme si nejmenší* $k$ *takové, pro které*

$$n^k > x.$$

*Zápis čísla* $x$ *v* $n$*-soustavě bude mít právě* $k$ *cifer. Nyní vydělíme* $x$ *číslem* $n^{k-1}$*. Výsledek zapíšeme jako první cifru, neboli* $k$*-tou cifru zprava, a se zbytkem po dělení provedeme stejný postup jako na začátku s* $x$*.*

**Cvičení 2.** *Převeďte:*

- 217 *do dvojkové soustavy,*
- 31 *do čtyřkové soustavy,*
- 987 *do jedenáctkové soustavy,*
- 98 *do osmičkové soustavy.*

**Tvrzení 3.** *Sčítání a odčítání se v libovolné soustavě provádí naprosto stejně jako v desítkové. Totéž platí i pro násobení a dělení.*

**Cvičení 3.** *Vypočítejte:*

- $(12)_3 + (211)_3$,
- $(3516)_7 + (54420)_7$,
- $(16CB)_{14} - (32A)_{14}$,
- $(13)_4 \cdot (21)_4$.

**Věta 1.** *V libovolné* $n$*-soustavě platí, že číslo je dělitelné* $n^k$ *právě tehdy, když končí* $k$ *nulami.*

*Důkaz.* Zápis čísla $n^k$ v $n$-soustavě je $1\overbrace{0\ldots0}^{k}$, a proto jakýkoli jeho násobek bude mít stále $k$ nul na konci. $\square$

**Příklad 1.** *Určete $n$, jestliže $(231)_n = 66$.*

**Příklad 2.** *Určete zbytek po dělení šesti (tj. $(6)_7$) a sedmi (tj. $(10)_7$) čísla $(12345654321)_7$.*

## Základy nerovností

**Miroslav Koblížek**

Nerovnost je vztah mezi dvěma výrazy, který udává, který z výrazů je větší. Na rozdíl od nerovnic, při jejichž řešení hledáme, pro jaké neznámé nerovnice platí, u nerovností se budeme snažit dokázat, že zadaná nerovnost platí vždy, když jsou splněny zadané podmínky.

**Tvrzení 1.** *(Naprosto nejzásadnější) Pro libovolné reálné číslo $x$ platí*

$$x^2 \geq 0.$$

**Příklad 1.** *Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.*

**Věta 1.** *(Trojúhelníková nerovnost) Nechť jsou $a$, $b$, $c$ strany trojúhelníku, pak platí $a < b+c$.*

S nerovnostmi lze provádět téměř stejné operace jako například s rovnicemi. K nerovnosti můžeme přičíst libovolné číslo. Stejně tak nerovnost lze libovolným nenulovým číslem vynásobit, ovšem zde musíme dát pozor na znaménko. Pokud nerovnost násobíme kladným číslem, znaménko nerovnosti se zachovává, pokud násobíme záporným, znaménko nerovnosti se obrací. Různé nerovnosti lze i sčítat libovolně dohromady, jenom je nutné dodržet směr znaménka nerovnosti.

**Příklad 2.** *Dokažte, že $o > 2v_a$, kde $o$ je obvod trojúhelníku a $v_a$ jeho výška na stranu $a$.*

**Příklad 3.** *Mějme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a$, $b$ a přeponou $c$. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n > 2$, platí $c^n > a^n + b^n$.*

**Příklad 4.** *Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a$, $b$ splňující podmínku $a + b > 0$ platí*

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

**Věta 2.** *(AG nerovnost) Nechť jsou $x_1, \ldots, x_n, n \in \mathbb{N}$ kladná reálná čísla, pak platí*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

*neboli*

$$x_1 + \ldots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

**Příklad 5.** *Pro kladná reálná $x, y, z$ dokažte*

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

**Příklad 6.** *Mějme kladná reálná čísla $a, b, c$ splňující podmínku $3abc \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Dokažte, že pro ně platí*

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3.$$

### Literatura

`http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf`

## Matematika v biologii

### Petra Zahajská

Přednáška představuje využití matematiky v přírodních vědách. Nejčastěji se používá pro vizualizaci dat, tedy tvorbu grafů a zní se vyvozují závěry. Budeme se tedy zabývat základními statistickými metodami využívanými v biologii, geologii a chemii.
Na přednášce se setkáte s pojmy četnost, histogram, aritmetický průměr, medián, modus. Dále si ukážeme minimálně dvě rozdělení a to unimodální a bimodální. Nemine nás ani percentil či tvorba krabicového diagramu. Podíváme se na závislosti dvou veličin a pěkné grafy z oblasti toxikologie, biochemie či geologie.

**Příklad 1.** *Z naměřených dat spočítejte aritmetický průměr, medián a nakreslete histogram. Obsah Cr (ppm):* 330, 420, 910, 700, 690, 510, 530, 260, 670, 530, 350, 650, 960, 570, 1 070, 450, 590, 710, 410, 490, 260, 1 930, 5 920, 970, 900.

**Příklad 2.** *Pro výše uvedená data najděte* 50., 25., 10. *a* 5. *percentil:*

1. *pomocí úvahy,*
2. *pomocí vzorce z přednášky.*

**Příklad 3.** *Prováděli jste měření v různých lokalitách. Naměřili jste obsahy Fe a Zn:*

| ***Vz.*** | ***Zn*** | ***Fe*** |
|---|---|---|
| *1* | *24* | *1,08* |
| *2* | *25* | *1,18* |
| *3* | *42* | *2,06* |
| *4* | *50* | *1,73* |
| *5* | *52* | *1,74* |
| *6* | *29* | *1,06* |
| *7* | *26* | *1,08* |
| *8* | *23* | *0,93* |
| *9* | *89* | *1,84* |
| *10* | *72* | *3,35* |
| *11* | *31* | *1,51* |
| *12* | *115* | *1,59* |
| *13* | *535* | *2,59* |
| *14* | *48* | *1,71* |

*Načrtněte graf závislosti těchto dvou měření a zjistěte, zda je obsah Fe nějak závislý na obsahu Zn.*

## Objemy a obsahy útvarů

**Stanislav Veverka**
Cílem této přednášky je zopakovat základní vzorečky pro obsah rovinných útvarů a objem a povrch prostorových útvarů. Dalším cílem bude naučit se počítat obsahy složitějších útvarů a výřezů, pro které ne vždy vzoreček existuje.

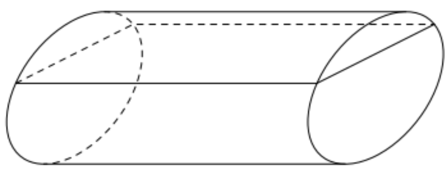
### Obsahy, objemy a povrchy útvarů

| | | |
|---|---|---|
| **Čtverec** $S = a^2$ | **Obdélník** $S = ab$ | **Kosočtverec** $S = av$, $S = \frac{u_1 u_2}{2}$ |
| **Kosodélník** $S = av_a$ | **Lichoběžník** $S = \frac{(a+c)v}{2}$ | **Kruh** $S = \pi r^2$ |
| **Trojúhelník** $S = \frac{cv_c}{2}$ | **Krychle** $S = 6a^2$, $V = a^3$ | **Kvádr** $S = (2ab) + (2ac) + (2bc)$, $V = abc$ |
| **Válec** $S = 2\pi r(r + v)$, $V = \pi r^2 v$ | **Koule** $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ | **Jehlan** S=Podstava(P)+Plášť(Q), $V = \frac{Pv}{3}$ |
| **Komolý jehlan** $V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 + S_2} + S_2)$ | **Kužel** $S = \pi r_2 + \pi rs$, $V = \frac{Pv}{3}$ | |

**Cvičení 1.** *Kružnici se středem $S$ a poloměrem $12\,\mathrm{cm}$ jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod $T$ byl středem strany $BC$. Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$.*

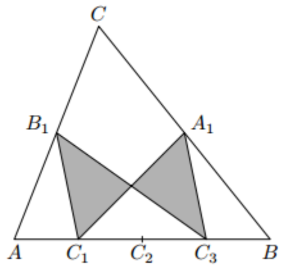
**Cvičení 2.** *Máme čtverce $ABCD$ a $KLMN$. Délky stran obou čtverců jsou v centimetrech vyjádřeny celým číslem. Bod $K$ je vnitřním bodem úsečky $AB$, bod $L$ je ztotožněn s bodem $B$ a bod $M$ je vnitřním bodem úsečky $BC$. Obsah šestiúhelníku $AKNMCD$ je $225\,\mathrm{cm}^2$. Jaký může být obvod tohoto šestiúhelníku? Najděte všechny možnosti.*

**Cvičení 3.** *Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce (viz obrázek 4). Průměr podstavy je* $180\,\mathrm{cm}$*, délka cisterny je* $4\,\mathrm{m}$*. Kolik* hl *mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru?*



Obrázek 4: Cisterna naplněná vodou do tří čtvrtin.

**Cvičení 4.** *Vyznačme si v obecném trojúhelníku $ABC$ (viz obrázek 5) následující body podle obrázku. Body $A_1$ a $B_1$ jsou středy stran $BC$ a $AC$, body $C_1$, $C_2$ a $C_3$ dělí stranu $AB$ na čtyři stejné díly. Spojíme body $A_1$ a $B_1$ s body $C_1$ a $C_3$, takže nám vznikne mašle ohraničená těmito spojnicemi. Jakou část obsahu celého trojúhelníku mašle zabírá?*




Obrázek 5: Trojúhelník $ABC$.

**Cvičení 5.** *Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu $B$, strany $AB$ a $CD$ jsou rovnoběžné. Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky* $|AC| = 12\,\text{cm}$, $|BD| = 9\,\text{cm}$. *Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku.*

## Posloupnosti a řady

**Tereza Ptáčková**

V následující přednášce se budeme zabývat posloupnostmi a řadami. A jaké to má praktické využití? Pomocí geometrické posloupnosti se třeba řeší úlohy, které se týkají pravidelného růstu nebo poklesu určitých veličin (například úrokování nebo přírůstek obyvatel nebo doba rozpadu radia ;-) ).

**Definice 1.** *Posloupnost je zobrazení z množiny přirozených čísel do libovolné množiny $A$. Může být zadána:*

- *výčtem prvků:* $1, 3, 5, 7, 9, \ldots,$
- *vzorcem pro $n$-tý člen:* $a_n = 2n - 1$,
- *rekurentně:* $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$.

**Definice 2.** *Aritmetická posloupnost je posloupnost se stálým rozdílem mezi každými dvěma sousedními členy. Tento rozdíl nazýváme diference a značíme ho $d$.*

Aritmetickou posloupností je třeba posloupnost všech sudých čísel. Předpis pro tuto posloupnost může vypadat třeba takto: $a_n = 2n$. Nás by ale mohlo zajímat, jaký je součet $n$ členů této posloupnosti.

**Definice 3.** *Součet členů posloupnosti je označován jako řada.*

Jak sečíst prvních $n$ členů aritmetické posloupnosti $S_n$? Snadno podle vzorečku $S_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n)$.

**Příklad 1.** *Mezi čísla* 7 *a* 51 *vložte tolik čísel, aby vznikla aritmetická posloupnost. Součet daných a vložených čísel je* 348. *Určete vložená čísla.*

**Příklad 2.** *V divadle je* 270 *sedadel. V první řadě jsou* 4 *sedadla a v každé další řadě o dvě sedadla víc. Kolik řad je v divadle a kolik míst je v poslední řadě?*

**Definice 4.** *Geometrická posloupnost je posloupnost se stálým podílem mezi každými dvěma sousedními členy. Tomuto podílu říkáme kvocient a značíme ho $q$.*

Geometrickou posloupností je třeba posloupnost druhých mocnin libovolného přirozeného čísla kromě jedničky. Obecný předpis pro $n$-tý člen posloupnosti je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti je $S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)/(q - 1)$.
Existují i další posloupnosti, které nejsou ani geometrické, ani aritmetické a přesto mají nějakou logiku, podle které se řídí každý následující člen posloupnosti. Například $a_n = n^2 \cdot a_n - 2 + 15$. Tyto řady nás prozatím nemusejí zajímat.

**Příklad 3.** *V pohádce o sedmero krkavcích bylo sedm bratrů, z nichž každý se narodil přesně* 5 *let po předchozím. Když byl nejstarší z bratrů právě třikrát starší než nejmladší, matka všechny zaklela. Kolik let bylo sedmero bratrům krkavcům, když je jejich matka zaklela?*

### Literatura

`http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/`

# Jak se dříve počítalo

**Tereza Ptáčková**

Velmi zajímavou součástí historie je i vývoj matematického počítání. Bohužel se o této tématice málokdy něco dozvíme ve škole. Napadlo vás někdy, jak se počítalo ve starověkém Řecku či v Římě? Nebo, zda-li se děti učily stejné postupy, jako se učíme dnes my? Těmto tématům se budeme věnovat v následujicích odstavcích.

Teď se pojďme podívat na nějaké zajímavé algoritmy pro počítání, aneb jak se dříve učilo počítat. Na nižších školách se počítalo za pomocí lin. To byly takové dřevěné destičky s rýhami, každá rýha představovala jiný řád a počítalo se pomocí pokládání kamínků do rýh. Na univerzitách jste se pak mohli naučit efektivnější a rychlejší postupy.

Začněme sčítáním. Nejkurióznější na středověkém počítání je, že se počítá od leva do prava, tedy od vyššího řádu k nižšímu. Hned nás napadne, že to není nejlepší způsob sčítání kvůli přenosům do vyšších řádů. Byla teda nutná zpětná korekce již spočítaných řádů. A teď k algoritmu pro sčítání. Nejprve se napsala sčítaná čísla pod sebe – jednotky pod jednotky, desítky pod desítky atd. Pak se sčítalo zleva doprava a výsledné číslo se vždy napsalo nad sčítaný řád. Pokud bylo číslo větší než 9, napsala se jen cifra na pozici jednotek a cifra na pozici desítek se přičetla k vyššímu řádu. Ukažme si to na příkladu:

Součet těchto tří čísel 2837, 3524 a 1722 je roven 8083. Postupujme dle algoritmu. Nejdříve sepíšeme čísla pod sebe.

```
2837
3524
1722
```

A teď začneme sčítat zleva.

```
6
2837
3524
1722
```

Když spočítáme $8 + 5 + 7$, dostaneme 20. Napíšeme tedy číslo 0 a do vyššího řádu přičteme 2. Ve vyšším řádu máme číslo 6, $6 + 2 = 8$.

```
8
607
2837
3524
1722
```

Při posledním sčítání dostaneme číslo 13, potřebujeme tedy do vyššího řádu připsat 1.

```
8 8
6073
2837
3524
1722
```

Výsledek je číslo, která získáme zapsáním cifer, které jsou navrchu sloupečku v jednotlivých řádech, tedy 8083.

**Příklad 1.** *Sečtěte tímto postupem čísla* 5019 + 4399*. Výsledek si snadno ověříte pomocí kalkulačky.*

Odčítání bylo velmi podobné sčítání. Jediný problém vznikl, když se má odečíst větší číslo od menšího. V takovém případě se vzala jedna cifra z vyššího řádu a pak už není odčítání žádný problém.
Odečtěme číslo 6983 od čísla 8946. Nejdříve zase napíšeme čísla pod sebe.

```
8946
6983
```

Počítáme zase od nejvyššího řádu, $8 - 6 = 2$.

```
20
8946
6983
```

$4 - 8 = -4$, půjčíme si tedy cifru z vyššího řádu. Tam je nula. Abychom si mohli cifru půjčit musíme jít ještě o řád výš. Uděláme korekci vyšších řádů a postupujem dále.

```
19
2063
8946
6983
```

Výsledek je 1963.

**Příklad 2.** *Odečtěte tímto postupem číslo 505 od čísla 1026.*

Obtížnější operací bylo násobení. Ve středověku se děti učily nazpaměť pouze násobení od $1 \times 1$ do $5 \times 5$. Čísla $6 \times 6$ až $9 \times 9$ si snadno dopočítaly pomocí snadného postupu. Čísla $a$, $b$, kde $5 < a$, $b < 10$, se vynásobila následovně: Jednotky se spočítaly pomocí vzorečku $(10 - a) \cdot (10 - b)$ a desítky pomocí vzorečku $(a + b - 10)$.
Důkaz správnosti: Abychom si ověřili, že daným algoritmem opravdu dostaneme správný výsledek, roznásobíme si obě závorky.
$(10 - a) \cdot (10 - b) = 100 - 10a - 10b + ab$, a cifru, co dostaneme na pozici desítek, musíme vynásobit 10, tedy $10 \cdot (a+b-10) = 10a+10b-100$. Sečteme-li obě čísla dostaneme výsledek: $100 - 10a - 10b + ab + 10a + 10b - 100 = ab$.

**Příklad 3.** $6 \cdot 8 = 48$*, jednotky:* $(10 - 6) \cdot (10 - 8) = 4 \cdot 2 = 8$*, desítky:* $(6 + 8 - 10) = 4$.

Pro násobení víceciferných čísel se používali obtížnější algoritmy. Začneme algoritmem zvaným galea. Projdeme si ho na příkladu krok za krokem.
Vynásobte $327 \cdot 151$.
Nejprve napíšeme čísla pod sebe tak, že nejnižší cifra druhého činitele se napíše pod nejvyšší cifru prvního činitele.

```
  327
151
```

Počítalo se opět zleva, vzala se nejvyšší cifra prvního činitele a tím se vynásobila postupně každá cifra druhého činitele, výsledek se napsal nad násobené číslo.

```
3 327
151
```

Dalším násobením dostaneme číslo $3 \cdot 5 = 15$, 5 napíšeme a 1 musíme přičíst k vyššímu řádu. Posledním násobením dostaneme číslo 3.

```
4 3
35327
151
```

Druhý činitel teď posuneme o jednu pozici doprava, napíšeme číslo pod druhý činitel a na první volnou pozici.

```
4 3
35327
1511
 15
```

Teď stejným postupem vynábobíme čísla 1, 5, 1 číslem 2 a opět zapíšeme na příslušné místo.

```
 83
4732
35327
1511
 15
```

Druhý činitel budeme posouvat, dokud se jednotky druhého činitele nedostanou pod jednotky prvního činitele. Musíme tedy udělat ještě jeden posun a vynásobit číslo 151 číslem 7.

```
  3
 90
 837
47327
35327
15111
 155
  1
```

Výsledek násobení je číslo 49 377. Slušností také bylo podtrhnout oba činitele.

**Příklad 4.** *Algoritmem galea vynásobte čísla* 418 *a* 164*.*

Velmi rychlým algoritmem pro násobení byla takzvaná pásková metoda. Popis výpočtu zase ukážu na příkladu. Vynásobme třeba čísla 375 a 4 251. První číslo napíšeme na papír, druhé číslo na proužek papíru a v obráceném pořadí cifer. Proužek papíru posuneme tak, aby byly jednotky pod jednotkama. Čísla, která jsou pod sebou spolu pronásobíme a napíšeme na volnou pozici doprava.

```
 375
   1524
-------
   5
```

Papírek posuneme o jednu pozici doleva, opět vynásobíme čísla, která se nacházejí pod sebou, sečteme a zapíšeme před předchozí číslo. Zapamatujeme si případný přenos do vyššího řádu. $(5 \cdot 5) + (1 \cdot 7) = 32$, napíšeme 2, zapamatujeme si 3.

```
 375
  1524
------
  25
```

Posuneme papírek a opakujeme. $3 + (2 \cdot 5) + (5 \cdot 7) + (1 \cdot 3) = 51$, napíšeme 1, zapamatujeme si 5.

```
 375
 1524
-----
 125
```

Papírek posouváme dokud nebude nejvyšší cifra prvního činitele nad nejvyšší cifrou druhého činitele. Výsledek dostaneme pod čarou.

```
    375
 1524
-------
1594125
```

### Literatura

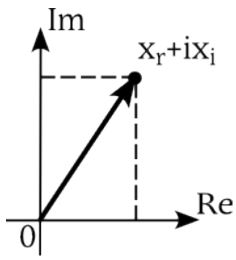
Bečvářová, Martina: *Vývoj matematického vzdělání*

## Komplexní čísla

### Vít Strádal

### Komplexní rovina

Reálná čísla můžeme reprezentovat na číselné ose: je to tedy množina bodů na přímce, nad kterými jsou definované operace + a ·. Speciální význam mají čísla 0 (neutrální ke sčítání) a 1 (neutrální vzhledem k násobení).
Pozn: někomu by mohlo chybět odčítání a dělení, ale tyto operace můžeme již definovat za pomocí sčítání a násobení. K tomu se ještě dostaneme.
S komplexními čísly chceme více, chceme aby množina bodů byla celá rovina. Bod v rovině můžeme jednoznačně popsat: reálnou a komplexní složkou (viz obrázek 6).




Obrázek 6: Reálná a komplexní složka: $x = x_r + ix_i$

Ke speciálním číslům přibude $i$ komplexní jednotka. Reálná čísla jsou teď podmnožinou komplexních, a jsou to taková čísla $x$, kde $x_i = 0$.

### Jak udělat operace

Stejně jako u reálných čísel bychom i s komplexními čísly rádi uměli dělat operace + a ·. Rozhodně chceme, aby se tyto operace chovaly na reálných číslech stejně. A aby měli „obdobné“ obecné vlastnosti na všech komplexních číslech. Sčítání je nejjednodušší: výsledné číslo bude mít jednotlivé složky jako součet složek sčítanců. Více formálně:

$$x = a + b,$$
$$x_r = a_r + b_r,$$
$$x_i = a_i + b_i,$$

jinými slovy:

$$a + b = (a_r + a_r) + i(a_i + b_i).$$

A z toho hned vidíme, že všechny důležité vlastnosti sčítání jsou zachovány:
komutativita:

$$a + b = b + a,$$

asociativita:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

záporné číslo:

$$\forall a\ \exists b : a + b = 0,$$

$$b = b_r + ib_i = -a_r - ia_i.$$

### Absolutní hodnota, neboli velikost

Na absolutní hodnotu můžeme pohlížet jako na vzdálenost od nuly. V reálných číslech jsou dvě čísla se stejnou absolutní hodnotou (to záporné a to kladné), v komplexních číslech je množina se stejnou absolutní hodnotou kružnice se středem v 0. Hodnotu spočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|a| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2}.$$

### Násobení

S násobením bude více práce.
Pro reálná čásla platí např. $1a = a$, pokud bychom udělalní násobení obdobně jako sčítání, bylo by $1i = 1_r i_r + i(1_i i_i) = 0 + i0 = 0$. A to je špatné.
Co tedy chceme:

$$1a = a,$$
$$|a|r = |ar|,$$
$$|a||b| = |ab|,$$
$$ri = (0 + i1)(r + i0) = 0 + i(r).$$

Vídíme např., že čísla na jednotkové kružnici zůstavají na jednotkové kružnici.
Tak kolik bude $ii$? Máme možnosti: $ii = i : iii = ii$, a proto $i = 1$; ale to se nerovná; $ii = -i : iii = -ii$, a proto $i = -1$; ale to se nerovná; $ii = 1 : iii = i$, a proto $i = -1$; ale to se nerovná. Tak třeba $ii = -1$.
Skvělé, z toho vylývá jak bude vypadat násobení:

$$ab = (a_r + ia_i)(b_r + ib_i) = a_r b_r + iia_i b_i + ia_r b_i + ia_i b_r = a_r b_r - a_i b_i + i(a_r b_i + a_i b_r).$$

**Příklad 1.** *Spočtěte $i^3$, $(7 + i3)(5 - i)$.*

### Dělení

Máme násobení, potřebujeme jen převrácenou hodnotu $a$.

$$\forall a\ \exists b : ab = 1$$

$$ab = 1$$

$$a_r b_r - a_i b_i + i(a_r b_i + a_i b_r)$$

$$a_r b_r - a_i b_i = 1$$

$$a_r b_i + a_i b_r = 0$$

$$b_i = \frac{-a_i b_r}{a_r}$$

$$a_r b_r - a_i \frac{-a_i b_r}{a_r} = 1$$

$$b_r (a_r + \frac{a_i^2}{a_r}) = 1$$

$$b_r \frac{a_r a_r + a_i^2}{a_r} = 1$$

$$b_r = \frac{a_r}{|a|^2}$$

$$b_i = \frac{a_r}{|a|^2} \frac{-a_i}{a_r}$$

$$b_i = \frac{-a_i}{|a|^2}$$

Zkouška:

$$ab = (a_r + i a_i) \frac{1}{|a|^2} (a_r - i a_i) = \frac{1}{|a|^2} (a_r^2 + a_r^2 + i(-a_r a_i + a_r a_i)) = \frac{1}{|a|^2} (|a|^2) = 1.$$

**Číslo komplexně sdružené**

$$\overline{a} = a_r - i a_i$$

$$\overline{5 + 7i} = 5 - 7i$$

$$1/a = \frac{\overline{a}}{|a|^2}$$

**Goniometrický tvar, polární souřadnice**

$$x = [|x|, \phi]$$

$$x = |x| (\cos(\phi_x) + i \sin(\phi_y))$$

Násobení je úžasné:

$$xy = [|x||y|, \phi_x + \phi_y]$$

**Exponenciální tvar**

$$x = |x|e^{i\phi}$$

K tomuto tvaru se může dojít přes rozklad daných funkcí do mocninných řad. Následujícím třem řádkům prostě musíte uvěřit, ale poté oceníte jak krásně jsou provázany funkce, které spolu zdánlivě vůbec nesouvisí:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Nyní budeme zkoumat, jak vypadá výraz $e^{i\phi}$:

$$\begin{aligned}
e^{i\phi} &= 1 + \frac{i\phi}{1!} + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \frac{(i\phi)^5}{5!} + \frac{(i\phi)^6}{6!} + \frac{(i\phi)^7}{7!} + \dots \\
e^{i\phi} &= 1 + i\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^2}{2!} - i\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + i\frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} - i\frac{\phi^7}{7!} + \dots \\
e^{i\phi} &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots + i\left(\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots\right) \\
e^{i\phi} &= \cos(\phi) + i\sin(\phi).
\end{aligned}$$

A nyní již máte dostatek informací, abyste spočítali, kolik je:

$$e^{i\pi} + 1,$$

$$i^{-i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{-i} = e^{-ii\frac{\pi}{2}} = e^{-(-1)\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\sqrt[i]{i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{i}} = e^{i\frac{\pi}{2}\frac{1}{i}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

## Černé díry

**Vít Strádal**

### Úniková rychlost

Úniková rychlost je nejnižší možná rychlost, při které může málo hmotné těleso (např. kosmická loď) opustit gravitační vliv více hmotného tělesa (např. planety):

$$v_u = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}},$$

kde $v_u$ je úniková rychlost, $\kappa$ je gravitační konstanta ($\kappa = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$), $M$ je hmotnost planety, $r$ je vzdálenost od středu planety.
Za pozornost stojí: čím těžší planeta, tím větší musím mít rychlost, aby z ní kosmická loď uprchla. A čím jsem dál od středu, tak už mi stačí méně.

| Výška<br>$km$ | Rychlost<br>$km/s$ | Poznámka |
|---|---|---|
| 0 | 11,180 | |
| 200 | 11,009 | nejnižší dráhy družic |
| 500 | 10,766 | |
| 1 000 | 10,395 | |
| 5 000 | 8,370 | |
| 10 000 | 6,977 | |
| 18 000 | 5,719 | navigační družice GPS |
| 36 000 | 4,337 | stacionární družice |
| 50 000 | 3,760 | |
| 100 000 | 2,738 | |
| 384 400 | 1,475 | dráha Měsíce |
| 500 000 | 1,255 | |

Pokud bude těleso hodně hmotné, bude úniková rychlost větší než rychlost světla.

### Schwarzschildův poloměr

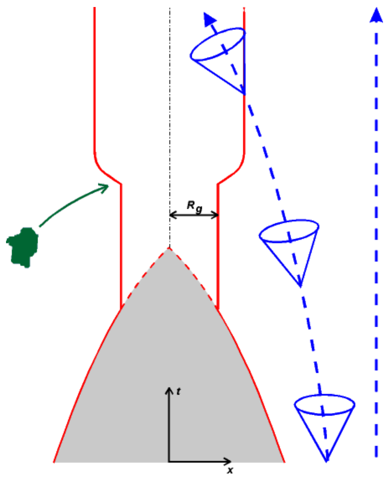
Pojmenování černá díra pochází od Johna A. Wheelera a je až z roku 1967. Samotnou myšlenku existence tělesa, ze kterého by nemělo unikat světlo, poprvé zformuloval John Michell již v roce 1783 a hodnotu Schwarzschildova poloměru z newtonovské mechaniky odvodil Laplace v roce 1798.
Proveďme takovýto myšlenkový experiment. Blikněme baterkou v okolí nějaké hvězdy (např. Slunce) a sledujme, kam se za jednu vteřinu rozšíří světelná vlnoplocha. Výsledkem bude kulová vlnoplocha. Představme si nyní, že máme tu moc stlačit veškerou hmotu Slunce do koule o poloměru pouhé 3 km. Experiment s baterkou dopadne úplně jinak. Světlo je strháváno křivým časoprostorem směrem ke „Slunci". Čím blíže blikneme, tím více. Přesně ve vzdálenosti 3 km nastane zajímavý jev. Světlo je hvězdou natolik strháváno, že žádný foton neletí ven. Fotony letící do stran hvězdu obletí a vrátí se zpátky. Jedině do centra letí fotony jako dříve. Vzdálenost, na které k tomu dojde, se nazývá Schwarzschildův poloměr (horizont):

$$R_g = \frac{2\kappa M}{c^2}.$$

Pro Slunce vychází právě 3 km, pro naši Zemi 9 mm. Z objektu stlačeného pod Schwarzschildův poloměr nemůže uniknout žádná částice, tedy ani částice světla. Tento objekt nazýváme černá díra. Hodnotu Schwarzschildova poloměru lze samozřejmě odvodit z obecné relativity. Tento výsledek je ale znám již velmi dlouho a byl odvozen Laplacem před 200 lety (1798) ze vztahu pro únikovou rychlost. Dosadíme-li do vztahu pro únikovou rychlost světla a vypočteme-li zpětně poloměr tělesa, vyjde právě Schwarzschildův poloměr. Poznamenejme ještě, že na poloměru $1{,}5R_g$ se nachází kruhová orbita fotonů a na poloměru $3R_g$ poslední stabilní orbita částic.

### Pád tělesa do černé díry

Při pádu tělesa do černé díry dochází vždy k zvětšení Schwarzschildova poloměru. Nabalováním hmoty z okolí se černá díra zvětšuje. Kužel budoucnosti částice (události, které sama může ovlivnit) se při pádu postupně naklání. Po průchodu horizontem černé díry míří kužel budoucnosti jen pod horizont. Částice spadlé do černé díry nemohou ovlivnit události vně černé díry. V levé dolní části obrázku 7 je schematicky znázorněn vznik černé díry. Rozměry objektu (vodorovně) se s časem (svisle) zmenšují až překročí Schwarzschildův poloměr. V pravé části obrázku 7 je časoprostorová trajektorie stojící částice (prostorová souřadnice se nemění, čas plyne).




Obrázek 7: Černá díra a její vznik.

### Jak může černá díra vzniknout

Co je to hvězda? Obrovská plynná koule. Obrovská a těžká. Gravitace stlačuje plyn k sobě. Tomu, aby gravitace zhroutila celou hmotu do jednoho malého místa, brání několik bariér.
V prvním sledu je to elektromagnetická síla, to je to, co dělá hmotu hmotou, že hrneček nepropadne stolem. Tato síla udržuje elektrony v elektronovém obalu atomu a vlastně svým způsobem způsobuje, že atomy mají objem, narážejí do sebe, neprojdou sebou.
Pokud je tlak a teplota větší, vzniká plazma (elektrony a atomová jádra začnou tvořit jakousi polévku), začne docházet k syntéze (slučování) atomových jader za vzniku energie ve formě záření. Tlak toho záření opět působí proti síle gravitace a zabraňuje gravitačnímu kolapsu.

Po nějakém čase však tomuto procesu dojde palivo, vodíková jádra se promění na helium, helium na lithium, uhlík a tak dále až po železo, pak už hvězda nemá co spalovat a tlak fotonů ustane.
Co se stane s hvězdou po vyhoření, záleží na množství faktorů, nejvíce na počáteční hmotnosti, v některých případech skončí hvězda výbuchem jako supernova nebo hypernova, jindy jako neutronová hvězda. Nás zajímá případ, kdy hustota hvězdy stoupne nad jistou kritickou mez, a úniková rychlost je tak velká, že je rovna rychlosti světla.

### Vypařování černých děr

Kvantově mechanický proces v blízkosti horizontu černé díry, který má za následek únik energie z černé díry v podobě vznikajících částic. Tepelné spektrum záření odpovídá absolutně černému tělesu, maximální vlnová délka je rovna Schwarzschildovu poloměru. Čím menší je černá díra, tím intenzívnější je vypařování. Poprvé tento proces popsal S. Hawking. Různé pohledy na tento proces:
Kreace páru částice-antičástice: V blízkosti horizontu černé díry se mohou vytvářet jakoby z ničeho elementární částice, které odnášejí část energie černé díry. Tento jev je způsoben kvantovými procesy. Ve vakuu neustále vznikají a zanikají páry částice a antičástice (střední kvadratické fluktuace polí musí být díky relacím neurčitosti pro pole nenulové). V blízkosti horizontu zůstane jeden člen páru pod horizontem a druhý se pro vnějšího pozorovatele vynoří jakoby z ničeho v blízkosti horizontu. Pár nezanikne, ale jeden člen se dostane pod horizont a druhý se objeví jako nad horizontem jako vyzářená částice. Tunelování částic z nitra černé díry: Bariérou je Schwarzschildův poloměr. Čím menší je díra, tím menší bariéra, tím snadnější tunelování, tím více díra září.
Pohyb nadsvětelnou rychlostí: Pod horizontem se částice po krátkou dobu (tak, aby se nenarušily Heisenbergovy relace neurčitosti) pohybuje nadsvětelnou rychlostí. Nadsvětelná rychlost nevadí – nepřenáší se informace a není pozorovatelná zvnějšku. U malé černé díry postačí kratší doba pohybu nadsvětelnou rychlostí a proces je tak pravděpodobnější.
Hmota v černé díře tak není navěky ztracena, ale postupně se opět „vypařuje“ do okolního prostoru. Tento proces je velmi pomalý.
Kdyby se naše Slunce stalo černou dírou, mělo by Schwarzschildův poloměr 3 km, teplotu $10^{-7}$K a vypařilo by se Hawkingovým mechanismem za 1066 let.

### Literatura

Kip S. Thorne (2004): *Černé díry a zborcený čas*
`http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/hvezdy/stars_4.html`

## Nekonečné desetinné zlomky a Malá Fermatova věta

**Zbyněk Pawlas**

Některé zlomky mají konečné desetinné vyjádření (např. $1/5 = 0{,}2$ nebo $1/8 = 0{,}125$), zatímco u některých je desetinné vyjádření nekonečné (např. $1/6 = 0{,}166\ldots$ nebo $1/7 = 0{,}142\,857\,142\ldots$). Když si rozmyslíme, jak počítáme členy desetinného rozvoje, zjistíme, že se výpočet v jistém okamžiku zacyklí. Proto každý zlomek má buď konečný, nebo periodický desetinný rozvoj.

**Definice 1.** Perioda *je skupina číslic, které se pravidelně opakují za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji daného čísla. Zapisuje se pomocí pruhu nad opakující se skupinou, např.* $1/6 = 0{,}1\overline{6}$ *nebo* $1/7 = 0{,}\overline{142\,857}$. *Obvykle nás zajímá nejkratší možná perioda. Řekneme, že zlomek s nekonečným desetinným rozvojem je* $k$-periodický, *jestliže nejkratší perioda má délku* $k$.

**Příklad 1.** *Zlomek* $1/6$ *je 1-periodický. Zlomek* $1/7$ *je 6-periodický.*

Zaměřme se na zlomky, které mají ve jmenovateli prvočíslo. Pro prvočíslo $p$ je desetinné vyjádření zlomku $1/p$ konečné jen pro $p = 2$ nebo $p = 5$. U ostatních $p$ nás může zajímat, jak závisí délka nejkratší periody na $p$. Tabulka 1 ukazuje tuto závislost pro několik prvních prvočísel různých od 2 a 5.

| $p$ | 3 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 6 | 2 | 6 | 16 | 18 | 22 | 28 | 15 | 3 | 5 | 21 | 46 |

Tabulka 1: Zlomek $1/p$ pro prvočíslo $p$ je $k$-periodický.

Můžeme si všimnout, že v několika případech je nejkratší perioda dlouhá $p-1$, v jiných je kratší, ale vždy dělí $p-1$. Takže vždy existuje perioda délky $p-1$, i když to nemusí být ta nejkratší. Toto pozorování platí obecně pro libovolné prvočíslo $p$ různé od 2 a 5.

**Tvrzení 1.** *Mějme prvočíslo $p$ různé od 2 a 5. Jestliže zlomek $1/p$ je $k$-periodický, pak $k$ dělí $p-1$.*

Naším cílem bude zdůvodnit, proč toto tvrzení platí. Budeme potřebovat některé vlastnosti týkající se prvočísel a dělitelnosti. Obzvlášť se bude hodit následující věta.

**Věta 1.** *Je-li součin dvou přirozených čísel dělitelný prvočíslem $p$, je aspoň jedno z nich dělitelné prvočíslem $p$.*

Dejme tomu, že se někde při dělení čísla 1 prvočíslem $p$ vyskytl zbytek $r$. Pokud se vyskytne znovu o $k$ míst dál, znamená to, že číslo $r \cdot 10^k$ má při dělení číslem $p$ zbytek $r$, což se dá zapsat jako

$$r \cdot 10^k = p \cdot d + r.$$

Odtud pozorujeme, že $p$ dělí $r \cdot (10^k - 1)$. Jelikož $r$ je zbytek po dělení prvočíslem $p$, je menší než $p$, a tak nemůže být prvočíslem $p$ dělitelné. S ohledem na větu 1 zbývá jediná možnost, a to, že prvočíslem $p$ je dělitelné číslo $10^k - 1$. Ukázali jsme, že zlomek $1/p$ má periodu délky $k$, když prvočíslo $p$ je dělitelem čísla $10^k - 1$, které je tvořeno $k$ devítkami.

**Příklad 2.** *Zlomek* $1/7 = 0{,}\overline{142\,857}$ *má periodu délky 6. Číslo* $10^6 - 1 = 999\,999$ *je skutečně dělitelné prvočíslem 7. Žádné číslo vyjádřené menším počtem devítek není dělitelné sedmi, perioda délky 6 je nejkratší možná.*

Chceme ukázat, že pro prvočíslo $p$, které je různé od 2 a 5, je $p-1$ délkou nějaké periody zlomku $1/p$. To je totéž, jako když řekneme, že je $10^{p-1} - 1$ dělitelné prvočíslem $p$. Na první pohled není jasné, proč by mělo nějaké číslo zapsané samými devítkami být dělitelné prvočíslem $p$. Pro čísla, která nejsou prvočísly, to platit nemusí, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 3.** *Číslo* $10^{26} - 1$ *není dělitelné číslem 27. Vydělíme-li číslo* $10^{26} - 1$*, které je tvořeno 26 devítkami, číslem 9, vyjde číslo vyjádřené 26 jedničkami. Součet jeho číslic je 26, a proto není dělitelné třemi.*

Asi nejstarší důkaz toho, že $10^{p-1} - 1$ je dělitelné prvočíslem $p$, pokud $p$ je různé od 2 a 5, podal francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665). Objevil, že $n^{p-1} - 1$ je dělitelné prvočíslem $p$, které nedělí $n$. Jeho výsledek se nazývá Malá Fermatova věta, na rozdíl od pověstné Velké Fermatovy věty, která patří mezi nejslavnější věty v historii matematiky.

**Věta 2.** *(Malá Fermatova věta) Je-li* $n$ *přirozené číslo a* $p$ *prvočíslo, je* $n^p - n$ *dělitelné prvočíslem* $p$*.*

Fakt, že součin $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ je dělitelný prvočíslem $p$ podle věty 1 znamená, že aspoň jeden z činitelů je dělitelný $p$. Pokud $n$ není dělitelné prvočíslem $p$, tak musí být číslo $n^{p-1} - 1$ dělitelné prvočíslem $p$.
Malá Fermatova věta se dá použít k zjištění zbytku velkých čísel po dělení nějakým prvočíslem.

**Cvičení 1.** *Určete zbytek po dělení čísla* $11^{55}$ *číslem* 17.

*Řešení:* Protože 11 a 17 jsou nesoudělná čísla, dostáváme z Malé Fermatovy věty, že $11^{16}$ má zbytek 1 po dělení 17. Proto také $11^{16} \cdot 11^{16} \cdot 11^{16} = 11^{48}$ má zbytek 1 po dělení 17. Dále $11^2 = 121 = 7 \cdot 17 + 2$, a tak $11^2 \cdot 11^2 \cdot 11^2 = 11^6$ bude mít zbytek $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ po dělení 17. Vidíme, že $11^{55} = 11^{48} \cdot 11^6 \cdot 11$ má stejný zbytek po dělení 17 jako $1 \cdot 8 \cdot 11 = 88$. Tento hledaný zbytek je 3, neboť $88 = 5 \cdot 17 + 3$.

## Literatura

Keith Ball (2011): *Podivuhodné křivky, počítání králíků a jiná matematická dobrodružství*, Argo/Dokořán, kapitola 3.