

Matboj

17. května 2013

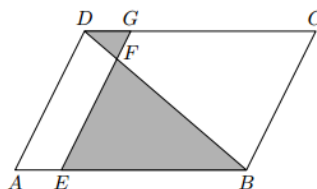
Příklad 1. Míra při přípravě na přednášku převáděl svoje rodné číslo 9203203944 do všech možných soustav. Jaká byla jeho poslední cifra v jedenáctkové soustavě?

Příklad 2. Délky stran pravouhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna měří 8 dm. Vypočítej obvod a obsah tohoto trojúhelníku.

Příklad 3. Čtverci o straně 5 cm je opsána a vepsána kružnice. Urči poloměry obou kružnic.

Příklad 4. Najděte dvojciferné číslo, pro které platí: Číslice na místě jednotek je o 1 větší než číslice na místě desítek. Součin hledaného čísla a jeho ciferného součtu je 405.

Příklad 5. Je dán kosodélník $ABCD$ jako na obrázku 1. Po straně AB se pohybuje bod E a po straně CD se pohybuje bod G tak, že úsečka EG je rovnoběžná s AD . Když byl průsečík F úseček EG a BD v pětině úhlopříčky BD (blíže k bodu D), byl obsah vybarvené části kosodélníku o 1 cm^2 větší, než když byl ve dvou pětinach (opět blíže k D). Určete obsah kosodélníku $ABCD$.



Obrázek 1: Kosodélník $ABCD$.

Příklad 6. Dokažte, že existují dvě různé mocniny dvojky takové, že jejich rozdíl je násobkem čísla 2013.

Příklad 7. Najděte taková dvě iracionální čísla, jejichž součin i součet je celé číslo.

Příklad 8. Míra vynalezl stroj na rozměňování mincí, který vždy vezme jednu minci a místo ní vrátí 5 jiných v celkové hodnotě stejné, jakou měla původní mince. Dokažte, že ať už vrací stroj jakékoli hodnoty mincí, nikdy nemůžete začít s jednou mincí a skončit s 26.

Příklad 9. Vynásobte následující čísla pomocí starověkého algoritmu „žárlivost“. Body budou za postup, ne pouze za výsledek!

$$4703 \times 234 = ?$$

Příklad 10. Lukáš šel na procházku a nasbíral 16 vzorků hornin. Přinesl je Pětě a chtěl vědět, kolik železa obsahují, aby mohl zjistit jak moc železitá voda tady teče. Lukáš ale nechtěl čísla, chtěl vidět výsledky v grafu, aby si o tom mohl udělat lepší představu. Co byste přinesli Lukášovi za vizualizaci dat?

Data: 1, 08; 2, 06; 1, 73; 1, 74; 1, 06; 1, 08; 0, 93; 1, 84; 3, 35; 1, 51; 1, 59; 2, 59; 6, 70; 6, 10; 2, 62; 3, 61.

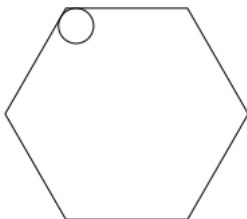
Příklad 11. Spočítejte:

1. $(i - 1)(2i - 3)$,
2. $(i - 1)(i - 1) + (2i + 1)^2$,
3. $11(i - 3) + i^2$.

Příklad 12. Řešte v oboru přirozených čísel: $a^2 + 144 = c^2$.

Příklad 13. Určete zbytek po dělení čísla 10^{2013} číslem 13.

Příklad 14. Uvnitř pravidelného šestiúhelníku o straně délky $2\sqrt{3}$ cm (viz obrázek 2) se pohybuje kruh o průměru 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu pravidelného šestiúhelníku. Vypočítejte obsah té části šestiúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.



Obrázek 2: Pravidelný šestiúhelník se stranou délky $2\sqrt{3}$ cm.

Příklad 15. Pro jaká kladná reálná čísla a a b nabývá výraz

$$\frac{2a + b + 2}{5\sqrt[5]{a^2b}}$$

nejnižší hodnoty a jaká tato hodnota je?

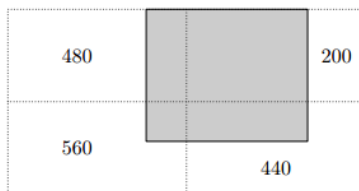
Příklad 16. Monika má doma nádhernou sbírku těživových čtyřúhelníků. Ta už je ovšem tak velká, že se ji Monika rozhodla protřídit. Nechala si jenom ty těživové čtyřúhelníky, které mají obě úhlopříčky stejně dlouhé, takové se jí totiž líbí nejvíc. Ukažte, že všechny čtyřúhelníky, které Monice zůstaly, mají dvě strany rovnoběžné.

Příklad 17. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích čísel dělitelných 3 je 3 285. Určete tato čísla.

Příklad 18. V kolika nejvýše bodech se protne 16 různých přímek, pokud žádné dvě nejsou rovnoběžné?

Příklad 19. Na šachovnici 3×3 je jeden čtvereček v rohu obarvený černě a všechny ostatní jsou obarveny bíle. Může být šachovnice obarvena pouze jednou barvou, pokud přebarvujeme pouze sloupce či řádky. Přebarvení je operace, která změní všechny barvy v jednom řádku či v jednom sloupci.

Příklad 20. Na obrázku 3 jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2 . Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy.



Obrázek 3: Obdélníkové parcely.

Příklad 21. Vynásobte následující čísla páskovou metodou: Body budou za postup, ne pouze za výsledek!

$$325 \times 284 = ?$$

Příklad 22. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je 180 cm^2 , přepona trojúhelníku má délku 41 cm. Určete délky odvěsen tohoto trojúhelníku.

Příklad 23. Rovnostrannému trojúhelníku KLM opíšeme kružnici. Na kratším oblouku KL této kružnice si zvolíme bod Q . Pak z bodu M spustíme kolmice na přímky QK a QL a jejich paty označíme E a F . Ukažte, že trojúhelník MEF je rovnostranný.

Příklad 24. *Mírovi se ve snu zjevily podivné digitální hodiny, neměly číslice, ale místo nich byly na pozici hodin vedle sebe dvě diody, které se rozsvěcely několika různými barvami a někdy nesvítily vůbec. Za dvojtečkou, tedy na místě minut, pak následovaly dokonce takové diody tři. Naštěstí se Mírovi ve snu vedle těchto hodin zjevily i stejně jdoucí běžné digitální hodiny. Díky tomu vyzkoumal, že v 9 : 47 svítla první dioda na místě hodiny fialově, stejně tak jako i první a druhá dioda na místě minut, poslední hodina na místě hodin byla zelená a poslední dioda na místě minut svítla červeně. V 15 : 30 svítla první dioda růžově, druhá zeleně a ze tří diod na místě minut svítla jen prostřední, a to červeně. Na principu jaké číselné soustavy tyto podivné hodiny ukazovaly čas?*

Příklad 25. *V reálných číslech vyřešte rovnici:*

$$a^2 - 10a + 26 = -2|a - 5| + 1.$$

Příklad 26. *Ve znaku Audi jsou 4 kružnice v řadě. Každá prochází středem sousední kružnice a středy leží na přímce. Jejich poloměr je ϕ , hodnota zlatého řezu. Jaký je potom obvod celého znaku?*

Příklad 27. *Vynásobte následující čísla pomocí starověkého algoritmu „galea“ (= lod'ka). Body budou za postup, ne pouze za výsledek!*

$$518 \times 125 = ?$$

Příklad 28. *Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníka jsou napsaná čísla 1,0,1,0,0,0. V jednom kroku smíme o jedna zvýšit dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?*

Příklad 29. *S hloubkou roste teplota Země přibližně rovnoměrně o 30°C na 1000 m. Jaká bude teplota na dně dolu hlubokého 900 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C ?*

Příklad 30. *Rovnice $8a^3 - 1 = 0$ má 3 řešení, jedním z nich je číslo $\frac{1}{2}$. Určete součet zbývajících dvou kořenů této rovnice.*

Příklad 31. *Ve čtverci o straně 1 metr bylo nakresleno 51 různých bodů. Ukažte, že pak existují tři takové, které se vejdou do menšího čtverce o straně 20 centimetrů.*

Příklad 32. *V rovině leží rovnoběžník ABCD a na jeho stranách AB, BC, CD a DA jsou postupně body W, X, Y a Z. Průsečík úseček WY a XZ označíme S. Body jsou zvoleny tak šikmově, že čtyřúhelník AWSZ je tětiový. Dokažte, že potom jsou tětiové i čtyřúhelníky WBXS, XCYS a YDZS.*

Příklad 33. *Číslo 1,236363636... není iracionální, zapiš ho proto zlomkem.*

Příklad 34. *Najděte komplexně sdružené číslo k:*

1. $13 + 6i$,

2. $(17i + 8)(3 - 2i) - i$,

3. $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Příklad 35. Určete m a n :

$$(63)_m = (39)_n,$$

$$(35)_m = (22)_n.$$

Příklad 36. Rozhodněte, pro která přirozená n je číslo $2^n - 4^n + 5^n$ dělitelné sedmi.

Příklad 37. Dokažte, že číslo je komplexní jednotka (tedy, že $|x| = 1$):

1. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

2. $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6} - i\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6},$

3. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}) + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$

Příklad 38. Jak dlouhou periodu má desetinný rozvoj zlomku $\frac{45}{67}$?

Příklad 39. Nechť a , b a c jsou strany trojúhelníku a t_a , t_b a t_c jsou těžnice tohoto trojúhelníku. Dokažte, že platí:

$$2(t_a + t_b + t_c) > a + b + c.$$

Příklad 40. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b, c, d je výraz

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

dělitelný číslem 12.

Příklad 41. Anička byla zvědavá, jak ten Lukášův obsah železa závisí na nadmořské výšce. Poroto se vydala naměřit nadmořskou výšku, tam kde Lukáš sbíral a přišla s takovouhle tabulkou:

	nadm. vyska(m)	Fe (ppm)
1	121	1830
2	185	1205
3	242	1156
4	305	1190
5	344	1124
6	435	1165
7	587	1145
8	640	1004
9	793	789
10	975	653
11	1035	646

Chtěla tedy vidět, jak to na sobě závisí. Jakou vizualizaci byste jí doporučili? Pro zadaná data vykreslete graf a zjistěte, jaká je závislost mezi výškou a obsahem železa.