PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

32. ročník soutěže Pikomat MFF UK se blíží ke svému konci. Zbývá posledních 7 zajímavých příkladů a dozvíme se vítěze. Situace (nejen) v čele výsledkové listiny je stále napjatá, vyplatí se proto řešit i poslední, šestou, sérii. Termín odeslání této série, jejíž zadání se nacházelo v minulém letáku, je **15. května**.

Přihlašování na tábor je v plném proudu a zbývají už jen poslední místa. Jeho termín je **13. – 26. srpna**. Pokud máte zájem se zúčastnit, přihlášku spolu s dalšími informacemi naleznete na http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor/2017. Tábor již poctivě připravujeme a doufáme, že na něm uvidíme mnoho známých i nových tváří.

Zájemce o další matematická zápolení zveme na týmovou soutěž MaSo, která je připravená na středu **17. května**. Letos se nově bude konat na dvou místech zároveň, v Praze a v Brně. Více informací naleznete na webových stránkách soutěže: http://maso.mff.cuni.cz.

Přejeme mnoho úspěchů při řešení šesté série.

Vaši organizátoři

Vzorová řešení a komentáře
k 5. sérii úloh

Úloha č. 1

Na stole ležely čtyři tabulky a, b, c, d *a na každé z nich bylo křídou napsané nějaké číslo, vedle nich měl pak napsaný seznam* 14 *instrukcí, které postupně procházel a podle nich čísla na tabulkách přepisoval.*

1. vpiš a d	**5.** sniž b	**9.** zvyš c	**13.** když d 5
2. zvyš c	**6.** když b 5	**10.** sniž b	**14.** vpiš c d
3. sniž d	**7.** vpiš a d	**11.** když b 2	
4. když d 2	**8.** vpiš a b	**12.** sniž d	

Instrukce vpiš x y *znamená, že na tabulku* y *vepíše číslo, které je na tabulce* x*;* sniž x *a* zvyš x *jsou velmi podobné instrukce, které znamenají, že se číslo na tabulce* x *o jedna sníží (může i do záporných čísel), respektive zvýší. Nakonec nejzajímavější je určitě pokyn* když x n*, který se vyhodnocuje následovně: Pokud na tabulce* x *je napsaná* 0*, pokračuje se na další instrukci, ale pokud tam je jakékoli nenulové číslo, skočí se o* n *instrukcí v seznamu zpět a odtud se pak pokračuje dál. (Kupříkladu* **4.** *instrukce je* když d 2*, takže pokud bude na tabulce* d *ve chvíli, kdy muž k této instrukci dojde, napsané třeba číslo* 7*, skočí se na* **2.** *instrukci a odtud se bude pokračovat na* **3.** *atd.) Instrukce se provádějí postupně od první dál s výjimkou skoků daných instrukcí* když*, dokud se neprovede i poslední instrukce.*

Nejprve muž napsal 1 *na tabulku* a*,* 2 *na* b *a na* c *a* d *napsal* 0 *a předvedl oběma mužům, jak po provedení všech instrukcí zůstane na tabulce* d *číslo* 3*. A poté přiměl Davida, aby vsadil deset pencí s tím, že když na tabulku* a *napíše nějaké číslo a na konci bude na tabulce* d *číslo* 0*, dostane deset liber. Na tabulku* b *napsal číslo* 1 026*, na* c 337 *a na* d *napsal* 0*. Když mu pak David podal tabulku* a *se svým tipem, začal postupně procházet všechny instrukce, rychle nad nimi kroužil prstem, vypadalo to, že počítá v hlavě, protože čísla ani na tabulky nezapisoval, až nakonec zakroutil hlavou a na tabulku* d *vypsal číslo* 6 137 394*. Jaké kladné číslo na začátku David napsal na tabulku* a*?*

Řešení: Nejdříve se omlouváme za chybu, která se stala při zadávání úlohy, kdy místo 337 mělo být −337 a takto zadaná úloha nemá řešení. Naštěstí se tento rozdíl projevuje až na konci po sestavení kvadratické rovnice, která je v podstatě řešením a za kterou jsem dával plný počet bodů, ale omlouvám se řešitelům, kteří si po sestavení správné rovnice nemohli být jistí, jestli počítali správně, případně neobjevili chyby, kterých by si jinak všimnuli.

Úlohu začneme řešit rozborem, jak vlastně funguje výše napsaná tabulka.

Z tabulky a instrukcí si uvědomíme, že hodnoty a i b musejí být celočíselné (aby se mohla splnit každá podmínka když). Hodnotu c máme zadanou a d nás nezajímá, protože se hned v prvním kroku ztratí. Takže všechny hodnoty a, b, c i d jsou celočíselné. Pro zpřehlednění budeme aktuální hodnoty značit velkými písmeny a původní hodnoty malými.

Protože instrukce jsou v zadání napsané celkem nepřehledně, přepíšeme si je do přehlednější formy a některém z nich sloučíme.

1. Vpiš A D.
2.–4. Dokud D není nula přičítej jednu k C a snižuj D, tedy pro $d \geqq 0$ (takže d, tedy a, musí být větší než 0, a nakonec započítáme jen kladná řešení) odpovídají instrukcím vpiš $(C + D)$ C a vpiš 0 D.
5.–6. Instrukce znamenají pro $b > 0$ (což je splněno) b-krát pusť instrukce od 1. do 6., tedy b-krát (celé). Vpiš A D, vpiš $(C + D)$ C a vpiš 0 D (takže obě přepisování D můžu vynechat a jen b-krát přičíst D k C). Po šesté instrukci tedy na A bude a, na B bude 0, na C bude $c + a \cdot b$ a na D bude 0. Další dvě jsou zřejmé.
7. Vpiš A D.
8. Vpiš A B.
9.–11. Instrukce jsou analogické 2. – 4. (a víme, že $B > 0$), tedy odpovídají příkazům vpiš (C + B) C a vpiš 0 C.
12.–13. Instrukce opět D-krát zopakují všechny instrukce od 8. do 13. (jako 5. a 6. instrukce), tedy d-krát (celé). Vpiš A B, vpiš (C + B C) a vpiš 0 C (opět oba přepisy C můžu vynechat).
14. Instrukce výsledek z C přepíše na D.

Ze zápisu vidíme, že na C, které se nakonec přesune na D, se napřed b–krát přičte a (přesunuté do D) a potom znovu a-krát přičte a (jednou z D a jednou z B). Tedy, že výsledné $D = a \cdot a + a \cdot b + c$.

Z tohoto si můžeme odvodit, že v našem konkrétním případě bude rovnice tvaru $6\,137\,394 = a^2 + a \cdot 1026 + 337$. Obecnou kvadratickou rovnici $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ vyřešíme například vzorečkem $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$, kterým najdeme obě řešení (kvadratická rovnice může mít až dvě řešení), tedy v konkrétním případě:

$$x_{1,2} = \frac{-1026 \pm \sqrt{1026^2 - 4 \cdot 1 \cdot (613\,794 - 337)}}{2}.$$

Avšak zde můžeme vidět, že rovnice žádné celočíselné řešení nemá. Tady došlo k chybě v zadání, kde před 337 mělo být − a rovnice tedy měla vypadat $6\,137\,394 = a^2 + a \cdot 1026 - 337$, která má kladné řešení 2017.

Komentář: Většina řešitelů rovnici sestavila správně a pak napsali, že nemá řešení, případně že někdo švindloval atd. a tito řešitelé dostali plný počet bodů. Ostatním řešitelům jsem nedával plný počet bodů a hodnotil jsem je celkem mírně.

Úloha č. 2

Kolem kulatého stolu uprostřed sedělo deset lékařů. Znal jsem z nich Johna Sanderse, kterému bylo 26, a dr. Browna, kterému je 33 let. Zajímalo by mě, jestli může být věk každého lékaře sedícího u stolu průměrem věku kolegy sedícího po levici a věku kolegy po pravici.

Řešení: Máme 10 doktorů, co sedí kolem dokola u kulatého stolu a naším úkolem bylo zjistit, jestli věk každého z nich může být průměrem věků souseda po jeho pravici a souseda po jeho levici. Další věc, kterou víme, je, že u stolu sedí 2 doktoři a jednomu z nich je 26 let a druhému je 33.

Zvolme si libovolného doktora a označme jeho věk x. Uvědomme si, že aby mohl být jeho věk průměrem kolegy po jeho levici a po jeho pravici, tak věk jednoho kolegy musí být větší a věk druhého kolegy musí být menší. Nebo by všechny 3 věky musely být stejné. Toto je vidět z vzorečku pro aritmetický průměr $x = \frac{z+y}{2}$. O kolik bude větší věk z, o tolik musí být menší věk y.

Vezmeme-li věky všech doktorů třeba směrem doprava od námi zvoleného doktora s věkem x, tak protože pravidlo, že jeden kolega je mladší a druhý kolega je starší, musí platit pro každého doktora, věky se budou postupně zvyšovat. Naopak v druhém směru se budou věky snižovat. Pak se ale stane, že pro všechny doktory nebude platit, že jeho jeden soused je starší a druhý mladší. Tato situace nastane u nejmladšího a nejstaršího doktora. Nejmladší bude sedět mezi dvěma staršími a nejstarší mezi dvěma mladšími.

Z toho vidíme, že aby věk každého doktora mohl být průměrem věků jeho sousedů, musí být všichni stejně staří. To ale ze zadání nejsou, takže tato úloha nemá řešení.

Komentář: Velká většina řešení byla správně, ale občas tam chybělo zdůvodnění, proč to tak je, nebo některé komentáře nebyly úplně jasné. Pár řešení objevilo, že úloha řešení má, ale to byla většinou chyba toho, že nebyly řádně zkontrolovány věky u všech doktorů, aby to opravdu byly průměry jeho dvou sousedů.

Úloha č. 3

„Ono dá docela práci zařídit, aby se nedohadovali,“ řekl přednosta. „Vždy s týdenním předstihem mi každý z nich dá seznam, na kterém má vyjmenované kolegy, u kterých chce, aby prezentovali někdy před ním, a pak kolegy, u kterých chce, aby mluvili po něm. Samozřejmě tam nemusí uvést všech devět kolegů, pokud je mu to u některých jedno, ale klidně může, čímž si zajistí jasnou pozici. Já si pak tyhle seznamy projdu a pokusím se vytvořit takové pořadí prezentujících, aby vyhovovalo naprosto všem požadavkům. Třeba na dnešní hlášení by všem požadavkům vyhovovalo 216 *různých pořadí.“*

Navrhněte, jak tyto požadavky mohly vypadat.

Řešení: Než se pustíme do samotného řešení, uvědomíme si, že počet všech možných pořadí, kdyby si žádný lékař nekladl podmínky, je $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$, což je mnohonásobně vyšší počet než 216, tudíž bude potřeba řazení velmi omezit. Jako nejsnáze počitatelný způsob vypadá rozdělit lékaře do menších skupinek (tím, že např. všichni ostatní budou chtít, aby vystupovali před nimi), ve kterých se navzájem omezovat nebudou. Nyní se proto podíváme na rozklad čísla $216 = 2^3 \cdot 3^3$, který se dá přepsat na $216 = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$. A snadno nás napadne, že obsah každé závorky je vyjádřením počtu seřazení pro tříčlennou skupinu.

Teď už je snadné navrhnout konkrétní požadavky. Např. lékař A chce, aby všichni ostatní prezentovali po něm, a lékaři E, F a G chtějí, aby před nimi mluvili lékaři B, C a D a po nich naopak H, I, J. Pokud tyto požadavky primář dodrží, dojde k rozdělení skupiny lékařů na tři tříčlenné skupinky, v nichž je pořadí lékařů volné a nezávislé na ostatních skupinkách, čímž skutečně docílíme, že existuje $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ vyhovujících uspořádání.

Dalším možným přístupem k úloze je například vytvoření čtyřčlenné skupinky a k tomu tříčlenné skupinky takové, že v ní polovinu případů omezíme (třeba tím, že A chce být před B). Další možností je zafixovat pořadí sedmi lékařů a zbylým třem částečně omezit možná umístění v tomto řetězci.

Komentář: Potěšilo mě, že ačkoliv se jednalo o kombinatorickou úlohu, která přistupovala k problému netradičně „z druhé strany“, tedy byl zadán počet kombinací a úkolem bylo navrhnout takovou situaci, která jej splňuje, naprostá většina řešitelů si s ní hravě poradila. Někteří dokonce postupovali jinak, než je uvedené ve vzorovém řešení, a tak je chválím za to, že mi přinesli nové pohledy, které mě třeba předtím ani nenapadly.

Úloha č. 4

*Na psychiatrii mají tři problematické agresivní pacienty (*A, B *a* C*). Každý z nich má v oblibě jednoho psychiatra (popořadě* a, b *a* c*), kterého ochraňuje, ale na zbylé dva lékaře útočí, přičemž ani jeho lékař mu v tom nedokáže zabránit. Tím pádem jediná šance pro lékaře (např.* a*), jak se vyvarovat napadení pacientem (*B *nebo* C*), je mít nablízku svého pacienta (*A*). Pacienti navzájem na sebe neútočí, lékaři samozřejmě neútočí na nikoho.*

Cestování výtahem je problém, protože do výtahu se vejdou nejvýše dva lidé, ale aby se výtah rozjel, musí v něm aspoň jeden člověk být. Navíc výtah vždy popojede jen o jedno patro a pak otevře dveře, takže může okamžitě dojít k napadení osob, které v něm cestují, ale stejně tak okamžitě může být lékař i chráněn.

Momentálně v prvním patře čtyřpatrové budovy stojí lékař a *a pacient* A *a je u nich výtah, ve druhém patře jsou pacienti* B *a* C *a ve třetím patře jsou lékaři* b *a* c*. Určete nejkratší možný postup, jak se mohou všichni dostat do 4. patra, aniž by došlo k nějakému incidentu. Schody samozřejmě kvůli nemocniční vyhlášce používat nemohou.*

Řešení: Jedno z možných řešení:

1. Aa popojedou výtahem do 2. patra
2. Aa vystoupí z výtahu a nastoupí BC, popojedou do 3. patra
3. B vystoupí a nastoupí c, Cc jedou do 4. patra
4. c vystoupí a C sjede do 3. patra
5. C sjede do 2. patra
6. A nastoupí a AC jedou do 3. patra
7. AC jedou do 4. patra
8. C vystoupí, A sjede do 3. patra
9. B nastoupí, AC jedou do 4. patra
10. AC vystoupí, c nastoupí, sjede do 3. patra
11. b nastoupí, cb jedou do 4. patra
12. b vystoupí, c jede do 3. patra
13. c jede do 2. patra
14. a nastoupí, ac jedou do 3. patra
15. ac jedou do 4. patra

Komentář: Mezi správnými řešeními se objevilo i několik takových, která se trochu lišila, i taková řešení jsem uznával. Pokud měl někdo nějakou chybu v postupu, zvýraznil jsem ji a dále jsem nekontroloval, jelikož v tu chvíli algoritmus ztratil význam a nebylo možné další kroky hodnotit.

Úloha č. 5

Zamyslel jsem se nad takovými přirozenými čísly, která vzniknou zapsáním několika (alespoň dvou) po sobě jdoucích čísel (např. 212 223*). Které z nich je nejmenší takové, že je zároveň dělitelné jedenácti?*

Řešení: Nejprve se podíváme na dvojciferná čísla, která vzniknou zapsáním dvou po sobě jdoucích čísel. Buď vypsáním nebo úvahou zjistíme, že nemohou být dělitelná 11 (protože dvojciferné číslo dělitelné 11 má obě číslice stejné). Dále zkontrolujeme trojciferná čísla. Mohou vzniknout zapsáním 3 jednociferných čísel nebo čísel 9 a 10, ani jedna za těchto variant není dělitelná 11.

Nakonec si začneme vypisovat čtyřciferná čísla vytvořena zapsáním po sobě jdoucích čísel (2 dvojciferných, 4 jednociferných nebo 8, 9 a 10). Pokud budeme postupovat od nejmenšího, tak nám stačí čísla začínající 1 a narazíme na číslo 1 617, které je dělitelné 11.

Komentář: Nejčastější chybnou odpovědí bylo číslo 121. Je potřeba si uvědomit, že číslo, které vznikne zapsáním několika (alespoň dvou) po sobě jdoucích čísel, je něco jiného než číslo, které obsahuje několik po sobě jdoucích čísel.

Úloha č. 6

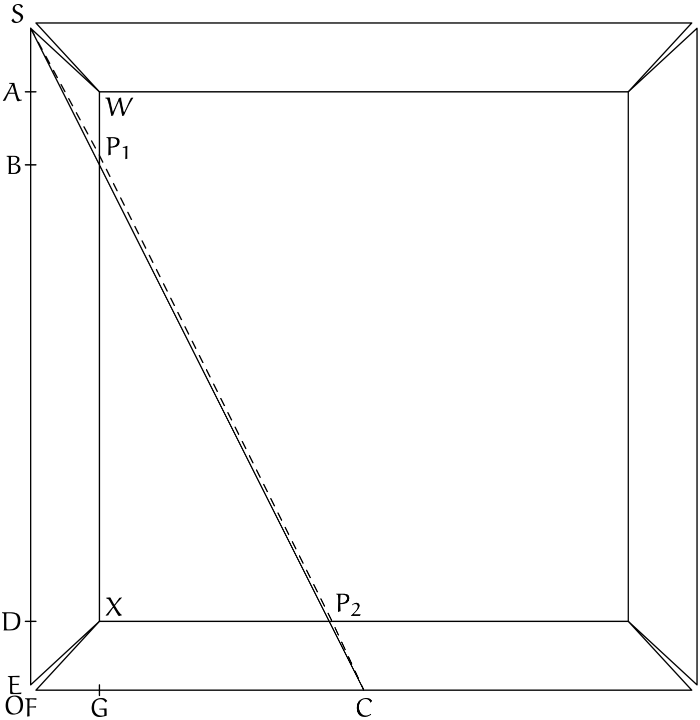
Rybník má tvar pravidelného komolého jehlanu s čtvercovými podstavami o hranách délky 100 *a* 124 *yardů a jeho hloubka je* 5 *yardů. Z jednoho rohu na břehu vede po stěnách a dně cestička do středu jedné ze dvou nesousedících hran opět na břehu. Tato cesta je nejkratší možná. Načrtněte, jak takovou cestu najít, a spočítejte její délku.*

Řešení: Rybník je vypuštěný, proto můžeme chodit jen po plášti (bez horní podstavy) komolého jehlanu. Načrtneme si síť tohoto pláště (obr. 1). Označíme si začátek cestičky S a konec C. Nejkratší cesta bude úsečka spojující tyto dva body, která nikde nevede mimo síť pláště komolého jehlanu. (Teoreticky by mohla existovat cesta částečně vedoucí mimo síť, jejíž část v síti by byla kratší než naše úsečka, ale v našem případě taková cesta neexistuje.)

Nyní stačí spočítat její délku. Nejlépe se bude počítat pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku SOC. Odvěsna SO bude mít délku $|SA|+|AD|+|DO|$. Délku úsečky SA spočítáme jako rozdíl velikostí podstav vydělený dvěma:

$$|SA| = \frac{124-100}{2} = 12\,\text{yardů}.$$

Úsečka AD je stejně dlouhá jako strana spodní podstavy, platí tedy $|AD| = 100\,\text{yardů}$. Délka úsečky DO je stejná jako výška lichoběžníku tvořícího jednu



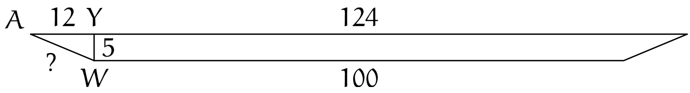
Obr. 1

stěnu komolého jehlanu. Všechny stěny komolého jehlanu jsou stejné, tedy i jejich výšky jsou shodné: $|AW| = |DX| = |GX| = |DO|$. K dopočítání jejich délek si uvědomíme, že jsou to vlastně stěny komolého jehlanu. Vezmeme si jeho bokorys (obr. 2), v něm v pravoúhlém trojúhelníku AWY známe délku odvěsny $|YW| = 5$ yardů (výška komolého jehlanu) a délku druhé odvěsny $|AY| = 12$ yardů (rozdíl délek stran podstav vydělený dvěma). Pomocí Pythagorovy věty spočítáme

$$|AW|^2 = |AY|^2 + |YW|^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$
$$|AW| = \sqrt{169} = 13.$$

Už tedy máme: $|SO| = |SA| + |AD| + |DO| = 12 + 100 + 13 = 125$.

Spočítáme délku druhé odvěsny trojúhelníku SOC : $|OC| = |FG| + |GC| = 13 + 50 = 63$. (Úsečka GC je stejně dlouhá jako polovina strany kratší podstavy.)



Obr. 2

Nakonec spočítáme délku cestičky:

$$|SC|^2 = |SO|^2 + |OC|^2 = 125^2 + 63^2 = 19\,594,$$
$$|SC| = \sqrt{19\,594} \doteq 139{,}9785.$$

Délka nejkratší cestičky je $\sqrt{19\,594}$ yardů.

Komentář: Tato úloha byla trochu záludná – koho napadlo rozložit si jehlan na síť měl vyhráno, ostatní se s úlohou dost potrápili. Hodně řešitelů určilo jako nejkratší cestičku průmět spojnice zadaných bodů na stěny a dno rybníka (přerušovaná čára na obrázku), ač jen o málo je tato cesta delší než uvedená nejkratší cesta. Tito řešitelé získali maximálně 4 body, protože není vůbec jasné, proč by měla být tato cesta nejkratší.

Úloha č. 7

Celý záhon měl totiž tvar čtverce a v něm byly vysázené macešky do tvaru obdélníku, jehož každý vrchol ležel na jiné ze stran čtverce. Jeho plocha byla čtvrtinou plochy celého čtverce. Jaký je poměr délek stran obdélníku z macešek?

Řešení: Budeme počítat obecně poměr délek. Nejdříve si nakreslíme čtverec o straně a, pokud chceme počítat s čísly, tak si za a dosadíme libovolné číslo a poměr vyjde vždy stejný.

Do čtverce vepíšeme obdélník tak, aby se dotýkal stran, které bude dělit na dvě části o délce b a $a - b$. Strany čtverce dopočítáme podle Pythagorovy věty jako $a\sqrt{2}$ a $(a - b)\sqrt{2}$.

Vypočítáme obsah obdélníku, který se bude rovnat čtvrtině obsahu čtverce. Dále si vyjádříme obsah zbytku jako součet obsahů čtyř trojúhelníků:

$$(a - b)\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} = \frac{a^2}{4},$$
$$b^2 + (a - b)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Druhou rovnici vydělíme první:

$$\frac{b^2 + (a-b)^2}{(a-b)\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}} = 3.$$

Vynásobíme celou rovnici dvojkou, čímž se zbavíme odmocnin ve jmenovateli a pak vydělíme oba z členů v čitateli jmenovatelem:

$$6 = \frac{b^2 + (a-b)^2}{(a-b) \cdot b} = \frac{b}{a-b} + \frac{a-b}{b}.$$

Poměr stran obdélníku si označíme jako $x(= \frac{b}{a-b})$. Tím obdržíme rovnici:

$$6 = x + \frac{1}{x}.$$

Roznásobíme a vyřešíme kvadratickou rovnici.

$$\begin{aligned} 6x &= x^2 + 1, \\ x^2 - 6x + 1 &= 0, \\ x_{1,2} &= 3 \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dostali jsme dva výsledky. Když se na ně ale podíváme, tak zjistíme, že jsou to čísla převrácená x, $\frac{1}{x}$ a tedy oba dva výsledky jsou platné, protože poměr může být jak delší strana ku kratší, tak kratší strana ku delší.

Komentář: Mnoho z vás zkoušelo narýsovat a změřit, což není platný výsledek a navíc asi těžko změříte tři minus dvě odmocniny ze dvou.

Další problém byl v tom, že jste si řekli, že když mám čtverec o straně a a obdélník, který má obsah roven jedné čtvrtině tohoto čtverce, tak nutně musí mít jednu stranu o délce a a druhou o straně $\frac{a}{4}$, kde jste naprosto zanedbali podmínku, že body obdélníku musí ležet na obsahu čtverce.

Někteří z vás se počítáním dostali k výsledku, který byl ve tvaru $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. Tento výsledek není špatný, jenom není finální, protože se dá dále upravit, aby neobsahoval odmocniny ve jmenovateli.

Úlohy páté série opravovali a komentáře sepsali: 1. František Steinhauser, 2. Kateřina Macková, 3. Miroslav Koblížek, 4. Martin Černý, 5. Jiří Štrincl, 6. Lenka Vábková, 7. Lukáš Kubacki.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 5. sérii

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	Σ
1.–2.	1.	Michal Beránek	8. GVOP	5	4	5	5	5	5	5	-	*30*	**150**
	1.	Ludmila H. Houfková	9. GMHS	5	5	5	5	5	5	-	-	*30*	**150**
3.–4.	2.–3.	Jakub Kislinger	9. GJVK	5	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**148**
		Adéla K. Žáčková	9. GCDP	5	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**148**
5.–6.	2.	Kryštof Pravda	8. GMSP	5	4	-	5	5	5	5	-	*29*	**147**
	4.	Petr Khartskhaev	9. PORG	5	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**147**
7.–8.	3.	Klára Hubínková	8. GMNP	5	5	5	5	5	1	5	-	*30*	**146**
	5.	Klára Churá	9. GCHB	5	5	5	5	5	4	4	-	*29*	**146**
9.	6.	Robert Gemrot	9. GHAV	5	5	5	5	3	1	5	-	*28*	**145**
10.–12.	7.–9.	Mikuláš Brož	9. GNSP	5	5	5	5	5	-	5	-	*30*	**144**
		Václav Janáček	9. GKJB	5	4	5	5	5	4	5	-	*29*	**144**
		Milan Malačka	9. GNAP	5	5	-	5	5	4	5	-	*29*	**144**
13.–14.	10.–11.	Lubor Čech	9. GMIK	5	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**143**
		Magdaléna Mišinová	9. GJKP	5	5	5	-	2	5	5	-	*27*	**143**
15.	4.	Tomáš Flídr	8. GKRO	5	5	5	5	3	4	5	-	*29*	**140**
16.	1.	Anna Hronová	7. GKJB	5	4	5	5	5	3	5	-	*29*	**139**
17.	12.	Jan Heřta	9. GSOV	5	5	5	5	4	5	5	-	*30*	**138**
18.	13.	David Kamenský	9. GBRV	5	5	5	5	5	0	2	-	*27*	**137**
19.–20.	14.–15.	Lukáš Frk	9. GNAP	5	5	-	5	5	-	-	-	*20*	**136**
		Vladimír Chudý	9. ZSRD	5	5	5	2	5	3	5	-	*28*	**136**
21.	5.	Filip Zikeš	8. GPBZ	5	5	5	5	5	-	5	-	*30*	**133**
22.–23.	6.–7.	Petr Hladík	8. GMNP	5	5	-	5	3	4	-	-	*22*	**131**
		Jan Poláček	8. GBRV	5	5	-	5	5	1	5	-	*26*	**131**
24.	16.	Klára Pernicová	9. GZAS	-	5	-	-	5	-	-	-	*10*	**130**
25.	8.	Šimon Glück	8. GPIS	5	5	4	5	5	4	4	-	*28*	**125**
26.–28.	2.	Jan Tesařík	7. GBEN	-	5	-	5	3	1	5	-	*19*	**121**
	9.	Josef Knápek	8. GVOL	-	5	5	5	5	1	-	1	*20*	**121**
	17.	Hana Slámová	9. GKJB	-	5	-	5	5	4	-	-	*19*	**121**
29.	18.	Klára Zemanová	9. PORG	4	5	-	-	3	3	3	-	*18*	**117**
30.–32.	19.–21.	Vojtěch Bořík	9. CGMN	-	4	-	-	5	4	5	-	*18*	**116**
		Lenka Ježková	9. PJZS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**116**
		Jan Schmidtmayer	9. GCAK	4	4	-	2	3	1	5	1	*18*	**116**
33.–34.	3.	Vanda Hutařová	7. GTMP	-	5	5	-	5	5	-	-	*20*	**114**
	10.	Natálie Prušáková	8. ZSDS	-	5	5	2	5	0	4	-	*21*	**114**
35.	22.	Erik Sedlak	9. GASK	-	5	4	5	1	1	1	-	*17*	**111**
36.–37.	4.	Matyáš Hebert	7. ZSKD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**110**
	11.	David Hájek	8. ZSJW	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**110**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	Σ
38.	12.	Vladimír Vávra	8. ZSJE	3	5	-	5	5	2	1	-	*21*	**109**
39.–41.	13.–15.	Martin Fried	8. GJGJ	2	5	1	5	5	0	2	-	*20*	**108**
		Robin Palán	8. GJGJ	4	4	3	5	5	1	1	-	*22*	**108**
		Filip Vopálenský	8. MLGP	5	2	-	5	2	1	1	-	*16*	**108**
42.	16.	Radomír Mielec	8. GVOL	-	4	-	-	5	-	4	-	*13*	**105**
43.	23.	Jana Čákorová	9. SGTP	5	-	3	1	5	1	-	-	*15*	**103**
44.	17.	Vlaďka Raclavská	8. SLGO	5	-	-	-	5	4	-	-	*14*	**102**
45.	5.	Tereza Kahounová	7. CGMN	3	5	1	5	5	1	1	-	*20*	**101**
46.	24.	Václav Trpišovský	9. OPEN	-	5	5	5	2	1	-	-	*18*	**100**
47.	18.	Karolína Jelínková	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**97**
48.	6.	Martina Lauerová	7. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**94**
49.	7.	Adam Ucháč	7. ZSSJ	3	3	-	5	2	-	5	-	*18*	**93**
50.	19.	Lenka Jenčíková	8. GCAK	-	5	-	-	5	1	-	1	*10*	**91**
51.	8.	Nikola Kášková	7. GTVL	1	4	0	2	2	0	1	-	*10*	**90**
52.–55.	1.–2.	Adéla Hodboďová	1. ZSZE	2	5	0	5	4	1	1	-	*18*	**89**
		Marek Pišťák	1. GJHP	-	5	-	2	5	-	-	-	*12*	**89**
	9.	Lukáš Trecha	7. GZNS	-	3	-	-	5	-	-	-	*8*	**89**
	20.	Miroslav Novotný	8. ZSTM	2	1	0	4	2	4	5	-	*18*	**89**
56.–57.	21.–22.	Sára Byšková	8. ZSJZ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**88**
		Mariia Graboviuk	8. ZPAL	2	1	0	1	2	1	4	-	*11*	**88**
58.–59.	3.	Filip Hodboď	1. ZSZE	3	5	0	5	4	1	1	-	*19*	**86**
	23.	Kateřina T. Skoupá	8. GBLA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**86**
60.–61.	10.	Vojtěch Štěpán	7. GBEN	-	5	-	5	3	-	-	-	*13*	**85**
	25.	Veronika Krčmáriková	9. GMAS	-	5	-	5	5	1	-	-	*16*	**85**
62.	26.	Julie Rubášová	9. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**84**
63.	24.	Jakub Mezera	8. ZSTR	-	5	-	5	5	-	-	-	*15*	**83**
64.	27.	Filip Gabriel	9. GCST	-	5	-	-	2	1	1	-	*9*	**81**
65.	25.	Vojtěch Vařecha	8. GTIS	-	5	-	-	2	-	5	-	*12*	**80**
66.	26.	Kristián Šťastný	8. GOST	-	5	2	-	2	4	4	-	*17*	**78**
67.–68.	1.–2.	Tereza Bencková	6. GEKP	-	4	3	5	5	-	-	-	*17*	**77**
		Karolína Biolková	6. ZSEK	-	5	-	5	5	-	2	-	*17*	**77**
69.–71.	11.	Jolana Štraitová	7. GBUD	-	5	-	-	2	0	5	-	*12*	**75**
	27.–28.	Filip Absolon	8. ZSKM	-	4	1	2	3	0	1	-	*11*	**75**
		Martin Mlejnecký	8. GSPI	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**75**
72.–73.	28.–29.	Kateřina Hönigerová	9. GLNS	-	-	-	2	2	1	-	-	*5*	**74**
		Anna Jurtíková	9. GINT	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**74**
74.–75.	29.	Markéta A. Doležalová	8. BGUK	-	5	-	-	5	-	-	-	*10*	**73**
	30.	Karolína Letochová	9. GSTE	-	4	-	2	5	-	2	-	*13*	**73**
76.	30.	Alexandra Rosenberg.	8. ZSTH	-	-	-	5	5	-	-	-	*10*	**68**
77.	31.	Tomáš Čurda	8. GCDP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**66**
78.	32.	Eliška Márová	8. ZSRA	-	5	0	2	-	-	1	-	*8*	**64**
79.–80.	33.	Kryštof Veverka	8. JGNA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**63**
	31.	Anička Hollmannová	9. GDAR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**63**
81.	34.	Šimon Skoumal	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**61**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	σ	Σ
82.	35.	Alena Zemánková	8. ZVAH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**60**
83.–84.	36.–37.	Antonín Rousek	8. GPDA	-	-	-	-	3	-	1	-	*4*	**58**
		Jan Šuráň	8. GSPI	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**58**
85.	38.	Ondřej Janeček	8. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**57**
86.–87.	39.	Jan Kotrlík	8. GMNP	-	-	-	5	-	-	1	-	*6*	**56**
	32.	David Ferenz	9. ZSRV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**56**
88.–90.	1.	Patrik Rosenberg	5. ZSTH	-	-	-	-	5	1	-	-	*6*	**55**
	33.–34.	Eliška Dorušková	9. GRPR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**55**
		Tereza Janíková	9.	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**55**
91.–92.	3.	Antonín Šámal	6. GFXS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**54**
	12.	Patrik Jendele	7. ZSNZ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**54**
93.–94.	40.–41.	Daniela Cieslarová	8. MZSN	-	4	0	1	1	-	5	-	*11*	**53**
		Tomáš Foral	8. ZSBL	-	4	-	-	5	-	1	-	*10*	**53**
95.	35.	Kateřina Matulová	9. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**51**
96.–97.	42.	Lucie Chromečková	8. ZSMK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**50**
	36.	Dominik Belza	9. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**50**
98.–100.	43.–44.	Hana Bečvářová	8. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**49**
		Kryštof Rakovský	8. ZSJS	2	5	0	5	1	1	1	-	*15*	**49**
	37.	Ondřej Chlubna	9. GOAO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**49**
101.	38.	Jan Heřmánek	9. GKKO	5	-	-	5	-	-	3	-	*13*	**48**
102.–103.	13.–14.	Petr Hladký	7. GSRY	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**47**
		Jana Horňáčková	7. ZSBC	-	5	-	-	-	-	-	-	*5*	**47**
104.	45.	Antonie Erika Grant	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**45**
105.–106.	15.	Vojtech Kysilka	7. GRNL	-	1	-	5	2	-	-	-	*8*	**41**
	46.	Anna Procházková	8. ZSRA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**41**
107.–109.	4.	Eliška Gemperlová	6. GNKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**39**
	47.	Jindřiška Palatová	8. ZSPJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**39**
	39.	Doubravka Horáková	9. ZSSZ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**39**
110.–112.	5.–6.	Filip Adam Chyška	6. AGKP	-	1	-	2	1	-	1	-	*5*	**38**
		Michaela Štouralová	6. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**38**
	40.	Tomáš A. Kovanda	9. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**38**
113.–114.	1.	Marie Steinhauserová	3. ZKNE	-	5	-	-	-	-	-	-	*5*	**35**
	7.	Šimon Genčur	6. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**35**
115.–116.	1.	Jiří Dittrich	4.	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**34**
	48.	Hana Pasková	8. GWOP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**34**
117.–118.	16.	Vojtěch Peterka	7. ZSRA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**33**
	49.	Klaudie Rampasová	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**33**
119.–120.	50.–51.	Martin Černý	8. ZSNL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**32**
		Vítek Slanina	8. GCHB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**32**
121.–122.	8.	Daniel Janeček	6. GMBP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**31**
	17.	Markéta Najmanová	7. ZSFP	-	-	-	-	5	-	-	-	*5*	**31**
123.–126.	9.	Martin Cornejo	6. ZBNS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
	18.–19.	Vít Holoubek	7. ZSTK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
		Kateřina Spáčilová	7. ZSSM	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	σ	Σ
123.–126.	41.	Aleš Socha	9. ZSJC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
127.–128.	20.	Rostislav Mates	7. ZSRA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
	42.	Alena Šindelářová	9. GZNS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
129.	21.	Světlana Dittrichová	7. ZSNN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**28**
130.–131.	52.	Marek Čermák	8. ZSNH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**27**
	43.	Dominik Hrdý	9. ZSHC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**27**
132.	22.	Kateřina Holečková	7. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**26**
133.–138.	23.–25.	Aneta Jenšíková	7. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Kristýna Malcová	7. ZSMB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Marek Matúš	7. GSTR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
	53.–54.	Michaela Billová	8. ZSCN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Thien Trang Pham Thi	8. GCHB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
	44.	Adam Kovalčík	9. ZSTV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
139.	45.	Hana Houzarová	9. ZSMS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**24**
140.–142.	46.–48.	Kateřina Brádlová	9. GPDA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Jan Hrebík	9. OPEN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Tereza Vitoušová	9. GCSP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
143.–147.	10.	Eliáš Hager	6. ZSKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	26.–27.	Monika Krátká	7. ZSOR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
		Jan Lelek	7. ZSFC	-	3	-	-	-	-	-	-	*3*	**22**
	55.	Jan Vladimír Podlipný	8. ZSFK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	49.	Michal Valentík	9. CZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
148.–150.	50.–52.	Dominik Farhan	9. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Magdalena Petrlová	9. GKJB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Jan Vavřín	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
151.–153.	53.–55.	Dana Dvořáčková	9. ZSBO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
		František Hovorka	9. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
		Gabriela Marxová	9. GDAR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
154.–155.	56.	František Bujnovský	8. CSLH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
	56.	Jan Vondráček	9. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
156.–158.	4.–5.	Aneta Bobisudová	1. ZSHC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
		Patrik Richvalský	1. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
	57.	Eliška Šebková	8. GDKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
159.–163.	28.	Jiří Bojčuk	7. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
	58.–59.	Lucie Brabencová	8. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Vít Jevčák	8. ZSEB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
	57.–58.	Vojtěch Dašek	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Lada Vestfálová	9. GJER	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
164.	59.	Aleš Horák	9. ZSVO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**15**
165.–169.	11.	Kristýna Dominiková	6. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	29.–30.	Marie Kukačková	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
		Linda Mrázová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	60.–61.	Julie Fialová	9. ZSMD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
		Martin Pacák	9. ZSCD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	σ	Σ
170.–174.	12.	Matěj Jaroš	6. GJGJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	31.	Jan Chlumecky	7. GBRV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	60.–61.	Roman Malenda	8. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
		Markéta Voráčková	8. ZSJK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	62.	Daniela Filipová	9. ZSVJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
175.	62.	Andrea Pospíšilová	8. GSTR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**12**
176.–178.	32.	Klára Billová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	63.	Vojtěch Stránský	8. ZOBA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	63.	Markéta Bučková	9. ZSKD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
179.–181.	6.	Eliška Tomáštíková	1. ZBUH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	33.	Vít Křivonoska	7. GVOP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	64.	Markéta Smejkalová	8. MZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
182.	64.	Stanislav Ježek	9. GCBR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**9**
183.	13.	Zuzana Černíková	6. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**8**
184.	65.	Ondřej Loukotka	8. GKKO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**6**
185.–189.	14.	Tereza Pristačová	6. GOPA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	34.	Tadeáš Grabic	7. ZSAL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	66.–68.	Gwen Gonnot	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Filip Kováč	8. ZSSK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Radim Křenek	8. ZSYV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
190.–191.	69.	Long Nguyen Hoang	8. GJVK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**
	65.	Emma Pěchoučková	9. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**