PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítejte s námi v novém roce! Snad pro vás byl jeho úvod příjemný a získali jste mnoho sil do řešení dalších zapeklitých úloh Pikomatu. V tomto letáku k vám přichází zadání úloh páté série, jejíž termín odevzdání je **13. března**. Do té doby vás však ještě čeká řešení úloh čtvrté série s termínem odevzdání **6. února**.

Soustředění
Čtvrtá série je obzvláště důležitá, neboť právě po ní budou vybíráni nejlepší řešitelé, kteří obdrží pozvánku na soustředění. Nepodceňte tedy řešení, neboť o účasti na soustředění může rozhodovat každý bod. Jak jsme již zmiňovali, soustředění se uskuteční **1.–7. 4. 2017** v Kunžaku.

Termín se sice kříží s okresními koly matematické olympiády Z6–Z8, ale nebojte se. Zájemci si budou moci okresní kolo napsat v Jindřichově Hradci s tím, že jim bude opraveno a započteno v domovském okrese.

Tábor
Také příprava tábora je v plném proudu. Na našich webových stránkách jsme již spustili předběžné přihlašování. Tábor se bude konat **13.–26. 8. 2017** v táborové základně ve Vyšních Lhotách u Frýdku-Místku. Další informace naleznete na našich stránkách v sekci Tábor (http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor/2017/). Na těchto stránkách budou postupně zveřejňovány další podrobnosti o táboře.

Hodně štěstí při řešení přejí

Vaši organizátoři

Zadání úloh 5. série 32. ročníku

Termín odeslání: 13. března 2017

S panem Whitakerem jsme si po počáteční formální konverzaci výborně padli do noty. Vypravoval nám svoje zážitky z cest a my kontrovali různými příhodami z našich zaměstnání, takže jsme od něj nakonec odcházeli až pozdě večer. Nebylo proto nic divného, že se nám ráno ani jednomu nechtělo vstávat už před šestou, ale bylo to potřeba, jelikož jsme chtěli dorazit do nemocnice co nejdřív, abychom zastihli všechny lékaře na hlášení a mohli si poslechnout, jak referují o jednotlivých pacientech.

Cestou přes Chadwick Market na nás kdosi začal volat: „Pánové, pánové! Ano, přesně vy dva! Pojďte blíž, vy vypadáte jako solidní muži, vám určitě chodí štěstí naproti, pojďte se o tom ke mně přesvědčit!“

David se ohlédl jako první a viděl, jak u zdi jednoho domu postává drobný muž v kabátu a před sebou má stolek a jakési tabulky. Věděl dobře, že pouliční hazard je zakázaný, ale byl velmi zvědavý, jaký trik používá tento muž, aby oklamal naivní kolemjdoucí.

Úloha č. 1: *Na stole ležely čtyři tabulky* a, b, c, d *a na každé z nich bylo křídou napsané nějaké číslo, vedle nich měl pak napsaný seznam* 14 *instrukcí, které postupně procházel a podle nich čísla na tabulkách přepisoval.*

1. vpiš a d	**5.** sniž b	**9.** zvyš c	**13.** když d 5
2. zvyš c	**6.** když b 5	**10.** sniž b	**14.** vpiš c d
3. sniž d	**7.** vpiš a d	**11.** když b 2	
4. když d 2	**8.** vpiš a b	**12.** sniž d	

Instrukce vpiš x y *znamená, že na tabulku* y *vepíše číslo, které je na tabulce* x*;* sniž x *a* zvyš x *jsou velmi podobné instrukce, které znamenají, že se číslo na tabulce* x *o jedna sníží (může i do záporných čísel), respektive zvýší. Nakonec nejzajímavější je určitě pokyn* když x n*, který se vyhodnocuje následovně: Pokud na tabulce* x *je napsaná* 0*, pokračuje se na další instrukci, ale pokud tam je jakékoli nenulové číslo, skočí se o* n *instrukcí v seznamu zpět a odtud se pak pokračuje dál. (Kupříkladu* **4.** *instrukce je* když d 2*, takže pokud bude na tabulce* d *ve chvíli, kdy muž k této instrukci dojde, napsané třeba číslo* 7*, skočí se na* **2.** *instrukci a odtud se bude pokračovat na* **3.** *atd.) Instrukce se provádějí postupně od první dál s výjimkou skoků daných instrukcí* když*, dokud se neprovede i poslední instrukce.*

Nejprve muž napsal 1 *na tabulku* a*,* 2 *na* b *a na* c *a* d *napsal* 0 *a předvedl* *oběma mužům, jak po provedení všech instrukcí zůstane na tabulce* d *číslo* 3. *A poté přiměl Davida, aby vsadil deset pencí s tím, že když na tabulku* a *napíše nějaké číslo a na konci bude na tabulce* d *číslo* 0, *dostane deset liber. Na tabulku* b *napsal číslo* 1 026, *na* c 337 *a na* d *napsal* 0. *Když mu pak David podal tabulku* a *se svým tipem, začal postupně procházet všechny instrukce, rychle nad nimi kroužil prstem, vypadalo to, že počítá v hlavě, protože čísla ani na tabulky nezapisoval, až nakonec zakroutil hlavou a na tabulku* d *vypsal číslo* 6 137 394. *Jaké kladné číslo na začátku David napsal na tabulku* a*?*

„To je podvod! To číslo jste si určitě vymyslel, vždyť jste ani nepsal mezivýpočty na tabulky," začal se rozčilovat David.

„Prosím, tady to máte. Klidně si to můžete propočítat pěkně jednu instrukci po druhé a uvidíte, že to nakonec vyjde," odpověděl ledovým tónem drobný muž. „Já jenom chtěl šetřit váš jistě drahocenný čas."

A měl pravdu, už takhle jsme se pěkně zdrželi. Chlácholil jsem Davida tím, že to přece bylo jenom deset pencí, ale bylo mi jasné, že jemu vůbec o peníze nejde. Naštěstí jsme museli pořádně přidat do kroku, a tak už neměl čas brblat, jak ho ten muž podvedl a že beztak ani nula vyjít nikdy nemohla.

V nemocnici jsme se potřebovali dostat do čtvrtého patra, ale když jsem viděl, že u výtahu postávají nějací divní lidé a střídavě jezdí nahoru a dolů, rozhodl jsem, že radši vyběhneme po schodech. Ještě že tak, protože když jsme doběhli nahoru, zrovna se zavíraly dveře od konferenční místnosti, aby tam mohlo začít hlášení. Vešli jsme rychle dovnitř a já jen pokývnutím hlavy pozdravil svoje známé, abych dál nerušil.

Úloha č. 2: *Kolem kulatého stolu uprostřed sedělo deset lékařů. Znal jsem z nich Johna Sanderse, kterému bylo 26, a dr. Browna, kterému je 33 let. Zajímalo by mě, jestli může být věk každého lékaře sedícího u stolu průměrem věku kolegy sedícího po levici a věku kolegy po pravici.*

Přednosta infekčního oddělení u stolu neseděl, ale chodil po místnosti. Prý se mu tak lépe hledala slova, když promlouval mladým sekundářům do duše. Stejně tak starý profesor Irons neseděl u stolu, ale v křesle v rohu místnosti. Vedle něj bylo několik volných židlí, a tak jsme se usadili na ně.

Když přednosta skončil svoji promluvu, začali jednotliví mladší lékaři postupně prezentovat své zajímavé pacienty. Když se dostalo na zprávu o třech zaměstnancích pana Whitakera, zpozorněl jsem, ale nedozvěděl jsem se nic víc, než co jsem očekával, tedy že všichni tři mají břišní tyfus a nejspíš stejný kmen, jako malý Jeremy.

Po konci hlášení jsem se konečně pozdravil s přednostou a zároveň mu představil i Davida. Hned na začátek jsem mu pochválil, jak má krásně zorganizované oddělení a že se mi líbí, jak mladí lékaři prezentují pěkně jeden po druhém, namísto toho, aby se po sobě ustrašeně dívali, kdo se má ujmout slova jako další.

Úloha č. 3: *„Ono dá docela práci zařídit, aby se nedohadovali," řekl přednosta. „Vždy s týdenním předstihem mi každý z nich dá seznam, na kterém má vyjmenované kolegy, u kterých chce, aby prezentovali někdy před ním, a pak kolegy, u kterých chce, aby mluvili po něm. Samozřejmě tam nemusí uvést všech devět kolegů, pokud je mu to u některých jedno, ale klidně může, čímž si zajistí jasnou pozici. Já si pak tyhle seznamy projdu a pokusím se vytvořit takové pořadí prezentujících, aby vyhovovalo naprosto všem požadavkům. Třeba na dnešní hlášení by všem požadavkům vyhovovalo* 216 *různých pořadí."*

Navrhněte, jak tyto požadavky mohly vypadat.

„To vás obdivuji, že se snažíte všem svým podřízeným vyjít vstříc," zapojil se do debaty David, „ale nepřiděláváte si tím zbytečně práci?"

„Trochu možná, ale přispěje to chodu oddělení a dobrým vztahům. A co do zbytečné práce, podívejte se třeba na psychiatry, kolik zbytečností dělají, než třeba převezou několik pacientů výtahem."

„Mám takový dojem, že jsme je dneska ráno viděli, ale občas mi přišlo těžké rozeznat, kdo je kdo," řekl jsem s úsměvem.

Úloha č. 4: *Na psychiatrii mají tři problematické agresivní pacienty (*A, B *a* C*). Každý z nich má v oblibě jednoho psychiatra (popořadě* a, b *a* c*), kterého ochraňuje, ale na zbylé dva lékaře útočí, přičemž ani jeho lékař mu v tom nedokáže zabránit. Tím pádem jediná šance pro lékaře (např.* a*), jak se vyvarovat napadení pacientem (*B *nebo* C*), je mít nablízku svého pacienta (*A*). Pacienti navzájem na sebe neútočí, lékaři samozřejmě neútočí na nikoho.*

Cestování výtahem je problém, protože do výtahu se vejdou nejvýše dva lidé, ale aby se výtah rozjel, musí v něm aspoň jeden člověk být. Navíc výtah vždy popojede jen o jedno patro a pak otevře dveře, takže může okamžitě dojít k napadení osob, které v něm cestují, ale stejně tak okamžitě může být lékař i chráněn.

Momentálně v prvním patře čtyřpatrové budovy stojí lékař a *a pacient* A *a je u nich výtah, ve druhém patře jsou pacienti* B *a* C *a ve třetím patře jsou lékaři* b *a* c*. Určete nejkratší možný postup, jak se mohou všichni dostat do 4. patra, aniž by došlo k nějakému incidentu. Schody samozřejmě kvůli nemocniční vyhlášce používat nemohou.*

„Ještě že my máme patřičný výcvik a můžeme s klidem vzpouzejícímu se lumpovi jednu ubalit, nechtělo by se mi totiž vymýšlet takhle složité postupy," uzavřel David rázně debatu na tohle téma, a tak jsme mohli zase dál pokračovat v tom, proč jsme vlastně přišli.

Od primáře jsme se dozvěděli, že Jeremymu už je mnohem lépe, takže není problém, abychom ho navštívili. V nemocnici ale ještě bude muset týden zůstat kvůli dodržení karantény. To Davida trochu zaskočilo, ale byli jsme ujištěni, že nám nic nehrozí, pokud si po návštěvě na pokoji pořádně umyjeme ruce.

Když jsme vešli do pokoje, uviděl jsem Jeremyho, ale teď už to nebyl ten bledý opocený chlapec, kterého jsem před několika dny zachraňoval. Teď seděl na posteli a usmíval se na nás, a tak jsem ho pozdravil: „Ahoj Jeremy, pamatuješ si na mě?"

„Dobrý den," odpověděl na pozdrav, „vy jste ten pan doktor, co se na mě byl podívat, když jsem byl doma nemocný? Maminka mi říkala, že jste mi zachránil život."

Chtěl jsem mu odpovědět, ale David byl rychlejší: „To je určitě pravda, pan doktor Wilkins je velmi šikovný. Ale chtěli bychom se tě na něco zeptat. Několik dalších lidí totiž dostalo stejnou nemoc jako ty, a tak by nás zajímalo, kde ses mohl nakazit. Byl jsi před tím, než jsi onemocněl, třeba u někoho na návštěvě?" Pak se otočil na mě a špitl: „Promiň, chtěl jsem to trochu urychlit."

„Ano, asi dva dny předtím jsem byl odpoledne u Hadleyho, to je můj spolužák. Venku hodně pršelo, a tak jsme celé odpoledne vyráběli modely lodí. A pak mi ještě jeho maminka dala chleba k večeři, to jsem doma nechtěl říkat, abych nedostal vyhubováno, že je takhle vyjídám."

David na mě vrhl významný pohled, ale já jsem byl jiného názoru: „To je pěkné, ale pokud vím, tak Hadley je dál zdravý. Navíc to bylo příliš krátce před propuknutím nemoci. Nevzpomínáš si ještě na něco, kdy jsi třeba jenom jedl někde jinde než doma?"

„To už bylo ale o víc než týden dřív, než jsem onemocněl. Když jsem šel ze školy, zahlédl jsem nějakou cizí paní, která měla na hromadě před domem různé kufry a bedny a postupně je nosila dovnitř. Šel jsem se jí proto zeptat, jestli s tím nechce pomoct, a ona byla moc ráda. Říkala mi, že se právě přistěhovala. No a pak, když to všechno bylo hotové, mi nabídla jablečný koláč ještě s čerstvou šlehačkou navrchu. Ten byl tak výborný," řekl Jeremy a olízl se.

„A víš, jak se ta paní jmenovala, nebo bys nám aspoň řekl, kde bydlí?" vyrukoval hned David s otázkami.

„Jméno nevím, ale můžu vám popsat, kde je její dům. A pamatuju si i její číslo popisné, protože mi přišlo zajímavé, že bylo složené z několika po sobě jdoucích čísel."

Úloha č. 5: *Zamyslel jsem se nad takovými přirozenými čísly, která vzniknou zapsáním několika (alespoň dvou) po sobě jdoucích čísel (např.* 212223*). Které z nich je nejmenší takové, že je zároveň dělitelné jedenácti?*

„A zase jsme o kus dál," pochválil jsem si na chodbě před pokojem.

„Jo, ale už je skoro poledne a zas tolik práce jsme dneska ještě neudělali," řekl David trochu naštvaně.

„Však se teď vydáme do Bramhamu, aspoň víme, koho se máme zkusit zeptat."

„Jenže kdyby ses mezi tím pořád nevěnoval vymýšlení a počítání těch svých úloh, šlo by nám všechno mnohem rychleji," odsekl a vyrazil dlouhou chodbou.

„Ještě ruce," zavolal jsem na něj, ale marně.

Celou cestu do Bramhamu na mě David ani nepromluvil. Věděl jsem, že nemá smysl mu nic rozmlouvat, protože časem sám zase vychladne, a tak jsem se raději díval z okna a věnoval se tomu, co mu teď tolik vadilo: tedy vymýšlení úloh. Zrovna jsme jeli zase kolem nějakého vypuštěného rybníka a všiml jsem si, že po jeho stěnách a dně vede cestička, která je normálně zatopená vodou.

Úloha č. 6: *Rybník má tvar pravidelného komolého jehlanu s čtvercovými podstavami o hranách délky* 100 *a* 124 *yardů a jeho hloubka je* 5 *yardů. Z jednoho rohu na břehu vede po stěnách a dně cestička do středu jedné ze dvou nesousedících hran opět na břehu. Tato cesta je nejkratší možná. Načrtněte, jak takovou cestu najít, a spočítejte její délku.*

Ani v Bramhamu na mě David nepromluvil a rovnou vyrazil ke dveřím, zatímco já jsem se ještě kochal květinovým záhonem před domem.

Úloha č. 7: *Celý záhon měl totiž tvar čtverce a v něm byly vysázené macešky do tvaru obdélníku, jehož každý vrchol ležel na jiné ze stran čtverce. Jeho plocha byla čtvrtinou plochy celého čtverce. Jaký je poměr délek stran obdélníku z macešek?*

David rázně zaklepal na dveře. Raději jsem rychle doběhl k němu, abych ho mohl případně trochu mírnit, protože jsem viděl, že je stále v ráži.

Vzorová řešení a komentáře

k 3. sérii úloh

Úloha č. 1

Před řáděním zlodějů rostlo v inkriminovaném úseku lesa 20 % dubů a 80 % buků. Zloději se vzhledem k vyšší výkupní ceně snažili kácet spíše buky, ale protože vše dělali potmě, bylo ze všech stromů, které pokáceli, 90 % buků, ale k tomu 10 % dubů. Když policisté zajišťovali oblast, zjistili, že z 50 % buků, které zde původně rostly, už zbyly pouze pařezy. Kolik procent z nepokácených stromů nyní tvoří buky?

Řešení: Označíme si x počet vykácených stromů a y původní počet stromů. Podle zadání bylo buků původně $0{,}8y$. Vykácených buků je 90 % ze všech vykácených stromů a zároveň polovina všech původně rostoucích buků, tedy

$$0{,}9x = 0{,}5 \cdot 0{,}8y = 0{,}4y,$$

takže platí, že

$$x = \frac{4}{9}y.$$

Po kácení zbylo v lese $y - x$ stromů; buků zbylo $0{,}5 \cdot 0{,}8y = 0{,}4y$. Podíl buků na zbylých stromech je tak

$$\frac{0{,}4y}{y-x} = \frac{\frac{4}{10}y}{y-\frac{4}{9}y} = \frac{\frac{4}{10}y}{\frac{5}{9}y} = 0{,}72.$$

Z nepokácených stromů tvoří buky 72 %.

Komentář: Vzorové řešení bylo inspirováno řešením Davida Kamenského. Celkově se sešel velký počet správných výsledků s dobrým komentářem, a tak mnoho řešitelů obdrželo 5 bodů. Několik řešitelů si špatně přečetlo nebo nepochopilo zadání a odpovídalo pak na jinou otázku. Na to si příště dávejte, prosím, pozor.

Úloha č. 2

Na nákladní automobil se vejde maximálně 1 000 polínek. Na každých 30 ujetých yardů spotřebuje automobil jedno polínko. Kolik nejvíce polínek dokážou zloději *dopravit ke svému odběrateli vzdálenému* 30 000 *yardů, mají-li na začátku v lese* 3 000 *polínek? (Polínka lze kdekoliv po cestě složit.)*

Řešení: Naším cílem je převézt co nejvíc polínek, protože čím víc polínek, tím víc peněz. Zkusme se nejprve zamyslet, kolik spotřebujeme polínek, abychom převezli co nejvíc polínek 30 yardů. Každých 30 yardů spotřebujeme jedno polínko. Naložíme tedy 1 000 polínek a ujedeme 30 yardů. Spotřebujeme 1 polínko, složíme 998. Proč jen 998? Jedno polínko si musíme nechat na cestu zpět, abychom se mohli vrátit pro zbylých 2 000 polínek. Opět naložíme 1 000 polínek a ujedeme 30 yardů, složíme 998 a jedno polínko si necháme na cestu zpět pro zbylých 1 000 polínek. Naložíme zbytek a ujedeme 30 yardů, převezeme 999 polínek. Ujeli jsme tedy 30 yardů, převezli jsme co nejvíce polínek (tj. 2 995) a spotřebovali jsme 5 polínek.

Jak dlouho bychom takto museli jezdit a posouvat svůj lup postupně vždy o 30 yardů, abychom se museli dvakrát vracet (nebo aby se nám to vůbec vyplatilo)? Aby se nám lup vešel na nákladní automobil na dvě otočení, museli bychom spálit postupným posouváním za kupcem 1 000 polínek. Jak daleko se dostaneme, když tímto způsobem spálíme 1 000 polínek? Protože se musíme vracet dvakrát, spálíme na každých 30 yardů vpřed 5 polínek. Dostaneme se tedy na $(1\,000:5)\cdot 30 = 6\,000$ yardů. Zbývá nám ujet 24 000 yardů a máme 2 000 polínek.

Teď se musíme pro lup při naší kapacitě nákladního automobilu vracet už jen jednou. Na ujetí 30 yardů a převezení co nejvíce polínek spotřebujeme už jen 3 polínka. A opět se zamysleme, jak daleko se dostaneme, abychom se vraceli vždy, jen když se nám to vyplatí, abychom převezli co nejvíce polínek a abychom se už nemuseli pro lup vracet a spotřebovávat tak polínka na cestu zpět. Máme $1\,000 : 3 \doteq 333$, takže ujedeme $333 \cdot 30 = 9\,990$ yardů. Dojedeme tedy na yard číslo $6\,000 + 9\,990 = 15\,990$; na cestu vpřed spotřebujeme 333 polínek a jednou se musíme vrátit pro lup. Celková spotřeba polínek je $333 \cdot 3 = 999$, převezeme tedy 1 001 polínko na 15 990. yard naší cesty za kupcem.

V tuhle chvíli už se nám vyplatí naložit 1 000 polínek a jet za kupcem přímo; jedno polínko budeme muset nechat v lese. Vracet se pro něj by se nám nevyplatilo, protože na cestu za polínkem bychom spotřebovali polínka alespoň 2 a to je zbytečná ztráta. Za kupcem ještě musíme ujet $30\,000 - 15\,990 = 14\,010$ yardů. Každých 30 yardů znamená jedno spotřebované polínko, celkem tedy na cestě spotřebujeme $14\,010 : 30 = 467$ polínek. Ke kupci jich dovezeme $1\,000 - 467 = 533$.

Celkem se nám tedy podaří ke kupci dostat 533 polínek.

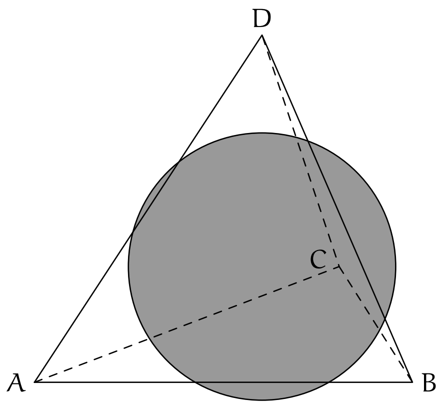
Komentář: Přišla spousta pěkných řešení, která se blížila správnému výsledku.

Nejvíce dělalo problémy, že jste se snažili nikde nenechat žádné polínko a pro každé se poctivě vracet. Zloději ale moc poctiví nebývají, zajímají je jen peníze, oni klidně polínko oželí, když na něm nedokážou vydělat. ;-) Dalším kamenem úrazu bylo, že jste si zvolili jednotku, o kolik jste se posouvali vpřed, často 300 yardů a nedošlo vám, že v jednu chvíli už se vracíte pro polínka, která třeba spotřebujete na cestu zpět, nebo naopak jste nechali v lese příliš mnoho polínek. Většina z vás, co se nedostala ke správnému výsledku, ale měla alespoň pěkně popsaný postup, dostala 3 body. Za skoro správný výsledek jsem dávala 4 body.

Úloha č. 3

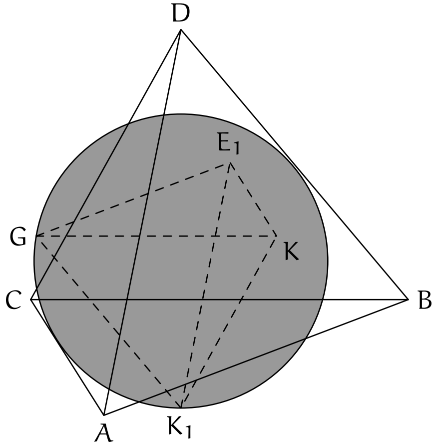
Těžítko bylo tvořeno dráty pospojovanými jako hrany pravidelného čtyřstěnu. Uvnitř tohoto čtyřstěnu byla vložená největší možná skleněná koule, která se tím pádem dotýkala všech drátů a přesahovala přes stěny tohoto čtyřstěnu. V této kouli byl zalitý druhý drátěný pravidelný čtyřstěn, jehož vrcholy se dotýkaly povrchu koule. Určete poměr délek hran většího a menšího čtyřstěnu.

Řešení: Nejprve vezmeme pravidelný čtyřstěn o hraně délky a a vepíšeme mu kouli, která se bude dotýkat jeho hran a bude přesahovat jeho stěny. Aby tato koule byla největší, musí procházet středy hran čtyřstěnu (obr. 1).



Obr. 1

Vypočítáme poloměr r této koule. Její střed bude ležet v rovině procházející vrcholy C a D a středem S_{AB} hrany spojující zbylé dva vrcholy. Povrch koule protne tuto rovinu v kružnici procházející bodem S_{AB} a také středem S_{CD} hrany CD. Střed S koule bude přesně ve středu úsečky $S_{AB}S_{CD}$ (obr. 2).



Obr. 2

Známe délku a hrany čtyřstěnu. Úsečka DS_{AB} bude mít velikost výšky v rovnostranném trojúhelníku ABD o straně délky a. Tedy $|DS_{AB}| = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$. Totéž platí pro úsečku CS_{AB}. Hrana CD má délku a. Dostáváme tak rovnoramenný trojúhelník, ve kterém musíme zjistit výšku (označme její délku v). To uděláme za pomoci Pythagorovy věty v trojúhelníku $S_{AB}S_{CD}C$ (obr. 3):

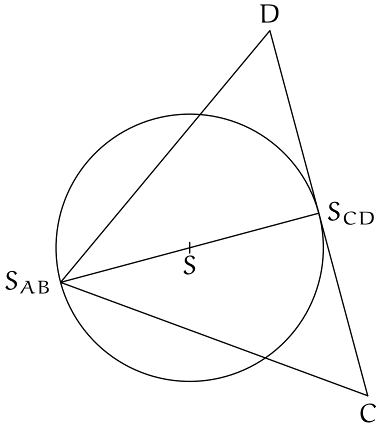
$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2 - a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Velikost výšky je dvojnásobek poloměru koule, a proto

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Když už známe poloměr koule, stačí nám zjistit, jak velký může být největší čtyřstěn vepsaný této kouli. Poloměr R opsané koule je závislý na délce b hrany



Obr. 3

vepsaného čtyřstěnu:

$$R = \frac{b\sqrt{6}}{4}.$$

Dosadíme za R námi vypočítaný poloměr a vyjádříme délku hrany čtyřstěnu:

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{b\sqrt{6}}{4},$$

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

V zadání je otázka na poměr délek, tak si vyjádříme poměr:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

Poměr délek je $\sqrt{3} : 1$.

Komentář: K výsledku vedlo více cest a značná část řešení byla korektní. Bohužel se vyskytla i taková řešení, kde byl zaměněn čtyřstěn a krychle, popřípadě čtverec. Jindy zase byla koule považována za kouli vepsanou čtyřstěnu, i když v zadání bylo napsáno, že se dotýká hran, a ne stěn. Poslední problém, který se opakoval, bylo zjednodušování z 3D do 2D, což zkreslovalo, a mnoho řešitelů si pak domýšlelo chybějící fakta.

Velmi mě potěšila spousta originálních řešení, která se dobrala ke správnému výsledku.

Úloha č. 4

Jako všechna policejní služební čísla, i toto mělo ty vlastnosti, že na lichých pozicích mělo sudé cifry a na sudých liché, a zároveň bylo dělitelné jedenácti. Jaké nejmenší přirozené číslo má tyto vlastnosti?

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že hledané číslo nemůže být jednociferné (nebude dělitelné 11) nebo dvojciferné (nesplňuje podmínku: sudá, lichá, …). Proto číslo začneme hledat mezi trojcifernými.

Jednotlivé cifry si označíme A, B, C. Aby číslo bylo dělitelné 11, musí platit:

$$A + C = B + 11n,$$

kde n je nezáporné celé číslo. Protože A a C jsou jednociferná sudá čísla, jejich součet může být maximálně 16. Proto n může být 0 nebo 1.

Pokud je $n = 0$ a A i C jsou sudá čísla, pak jejich součet je také sudý a nemůže se rovnat lichému B. Proto $n = 1$, a tudíž dostáváme rovnici $A + C = B + 11$. Aby hledané číslo bylo co nejmenší, musí být $B = 1$. Tudíž dostáváme $A + C = 12$. Této rovnici nejlépe odpovídá dvojice čísel 4, 8.

Hledané číslo je 418.

Komentář: Našli se řešitelé, kteří úlohu řešili vypsáním násobků 11 a hledáním čísla, které dané vlastnosti splňuje. Takové řešení bylo také hodnocené 5 body, i když nebylo tak pěkné. Odpovědi bez postupu bohužel nemohly být hodnoceny plným počtem bodů. Nejčastější chyby byly z nepozornosti.

Úloha č. 5

Všiml si, že každý řádek je dlouhý 12 *palců a je sestavený z obdélníků délky* 1, 3 *nebo* 5 *palců (nemusí být použity všechny a mohou se samozřejmě opakovat). A především si všiml, že každý řádek je jiný, co do pořadí použitých obdélníků. Kolik nejvíce řádků může mít taková mozaika?*

Řešení: Jeden řádek mozaiky má 12 palců a můžeme ho složit jen z jednopalcových, nebo jen z třípalcových, z jednopalcových a třípalcových, z jednopalcových a pětipalcových, nebo ze všech tří obdélníků.

Je devět možných složení řádků. Začnu s 12 jednopalcovými a postupně budu odebírat po jednom (zapíšu jen možné kombinace). Pro přehlednost si označím jednopalcový obdélník A, třípalcový B a pětipalcový C.

(1) $12A$

(2) $9A + 1B$

(3) $7A + 1C$
(4) $6A + 2B$
(5) $4A + 1B + 1C$
(6) $3A + 3B$
(7) $2A + 2C$
(8) $1A + 2B + 1C$
(9) $4B$

Těchto devět možností můžeme rozmíchávat, protože se řádky mozaiky liší jen pořadím obdélníků. Jelikož obdélníky stejného druhu jsou zaměnitelné, jedná se o permutace s opakováním. To je takový šikovný vzorec, který říká, že když sečteme počet různých prvků (obdélníků), které použijeme (3 obdélníky A a 3 obdélníky B), a pak použijeme faktoriál (o!) tohoto součtu (o! je číslo rovné součinu všech kladných celých čísel menších nebo rovných o, tj. $o! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot o$), a nakonec to vydělíme součinem počtu jednotlivých různých prvků, na které jsme také použili faktoriál ($o_A! \cdot o_B! \cdot o_C!$), tak získáme počet možných uspořádání těchto prvků:

$$\frac{(o_A + o_B + o_C)!}{(o_A!) \cdot (o_B!) \cdot (o_C!)},$$

kde o_x je počet obdélníků typu x.

Počet uspořádání pro jednotlivé možnosti zaneseme do tabulky:

o_A	o_B	o_C	$o_A!$	$o_B!$	$o_C!$	$(o_A + o_B + o_c)!$	$\frac{(o_A+o_B+o_C)!}{(o_A!)\cdot(o_B!)\cdot(o_C!)}$
12	0	0	12!	1	1	12!	1
9	1	0	9!	1	1	10!	podíl 10! a 9! je 10
7	0	1	7!	1	1	8!	podíl 8! a 7! je 8
6	2	0	720	2	1	40 320	28
4	1	1	24	1	1	720	30
3	3	0	6	6	1	720	20
2	0	2	2	1	2	24	6
1	2	1	1	2	1	24	12
0	4	0	1	24	1	24	1

Nakonec sečteme počet všech možných přehození:

$$1 + 10 + 8 + 28 + 30 + 20 + 6 + 12 + 1 = 116.$$

Mozaika tedy může mít nejvíce 116 řádků.

Komentář: Vzorové řešení bylo inspirováno řešením Václava Trpišovského, které se mi moc líbilo. Tento příklad se dal řešit i vypisováním všech možností. Takový přístup má své výhody i nevýhody. Výhoda třeba je, že to zvládnou skoro všichni; nevýhoda je, že můžete zapomenout na některé možnosti, je to velmi zdlouhavé a neekologické (chudáci stromy). Byla spousta řešitelů, kteří měli správný výsledek, ale někteří jen nepopsali svůj postup, za což jsem strhávala body. Také se objevilo několik málo řešitelů, kteří nepochopili zadání a místo hledání nejvíce možných kombinací i pořadí obdélníků hledali jen možnosti složení řádků.

Úloha č. 6

Každý z těchto dvou mužů si totiž myslel své přirozené číslo, ale navzájem si ho nechtěli říct. Rozhodli se proto, že oba pošeptají své číslo konstáblu Lewisovi a ten jim pak, v libovolném pořadí, řekne součet těchto dvou čísel a jedno náhodné číslo. Když tak opravdu učinili, řekl jim konstábl 1 000 *a* 2 000*. Na to první muž popravdě přiznal, že vážně netuší, jaké číslo si myslel jeho kamarád. Dokáže už druhý muž určit číslo toho prvního? Jak?*

Řešení: Druhý muž zná své číslo. Pokud by měl číslo větší než 1 000, součet čísel by se už nemohl rovnat 1 000, ať má první muž zvolené jakékoli přirozené číslo. V takovémto případě je schopen dopočíst, jaké číslo si zvolil první muž (jako 2 000 – číslo druhého muže).

Pokud bude mít číslo menší než 1 000, není schopen bez žádné další informace určit, která ze dvou hodnot, které konstábl Lewis řekl, je správná, a která náhodná: součet obou čísel může být roven jak 1 000, tak 2 000.

Druhý muž má ale k dispozici ještě jednu informaci, a to, že první muž nebyl schopen říct, jaké číslo má ten druhý. Z toho plyne, že první muž musel mít jistě hodnotu menší než 1 000, neboť jak jsme vysvětlili výše, bez žádné další informace není schopen určit, jaký je součet obou čísel.

V tuto chvíli druhý muž ví, že oba mají jistě číslo menší než 1 000, proto snadno dopočte hodnotu druhého muže (1 000 – své číslo).

Poznámka na závěr: Druhý muž nemůže mít číslo 1 000, protože v tu chvíli by první muž věděl, že jedinou možností pro číslo druhého muže je též 1 000.

Komentář: V této úloze jsem bral přirozená čísla jako kladná celá čísla bez nuly, protože většina z řešitelů je chápala tímto způsobem. Zároveň bych se chtěl omluvit „papírovým“ řešitelům za červené škrtance, které se jim na úlohách zbytečně objevily; při opravování jsem se do úlohy trošičku zamotal. O:)

Úloha č. 7

Ve znaku se propojeny nacházely rovnostranný trojúhelník a čtverec, oba o stejném obvodu. Jaký byl poměr jejich obsahů?

Řešení: Úloha je vcelku přímočará, ale budeme k jejímu řešení potřebovat znát dvě věci – jak spočítat obsahy čtverce a rovnostranného trojúhelníku a jak upravovat rovnice.

Jak spočítat obsah čtverce a rovnostranného trojúhelníku najdeme třeba v matematických tabulkách (moc šikovná knížka, kterou stojí za to prolistovat, když si nevíme rady). Když si délku strany čtverce označíme a a délku strany trojúhelníku b, zjistíme, že

$$S_\square = a^2,$$
$$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2.$$

To už je docela dobré, jen máme každý obsah vyjádřený pomocí jiné proměnné. Abychom mohli zjištěné obsahy dát do poměru, potřebujeme ještě vyjádřit vztah mezi a a b.

K tomu nám poslouží jednoduchý fakt – víme, že jak čtverec, tak rovnostranný trojúhelník mají stejný obvod:

$$O_\square = 4a,$$
$$O_\triangle = 3b,$$
$$O_\square = O_\triangle.$$

Odtud

$$4a = 3b,$$
$$a = \frac{3}{4}b.$$

Nyní už prostým dosazením za a v $S_\square$ dostaneme požadovaný poměr:

$$S_\square : S_\triangle = \left(\frac{3}{4}b\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2\right) = \left(\frac{3^2}{4^2} \cdot b^2\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2\right) = \frac{3^2}{4} : \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} : 1.$$

Výsledek bychom mohli ještě vyčíslit, ale protože v něm máme $\sqrt{3}$, která je iracionální, dělat to nebudeme. Jako matematici v podobných případech vždy preferujeme přesné vyjádření výsledku před zkresleným a iracionální čísla v zápisu výsledku (jako např. $\sqrt{3}$ nebo π) nám nevadí.

Komentář: Úlohu jsem hodnotil velmi mírně, protože úplně korektních řešení moc nepřišlo. Těch, co byla blízko, ale přišla velká spousta.

Mezi největší chyby patřilo, že jste si vybrali délky stran trojúhelníku i čtverce tak, aby vycházel stejný obvod (například 4 cm a 3 cm) a vypočítali poměr obsahů jen pro tyto hodnoty. Úlohu tak řešit lze, ale je nutné v takovém případě zdůvodnit, proč poměr vyjde stejně, nezávisle na hodnotách délek stran. To už většině řešení chybělo.

Druhou velkou chybou bylo zaokrouhlování, díky kterému vám poměr vycházel i $9:7$. Matematici výsledky nezaokrouhlují. Když jim vyjde π nebo $\sqrt{3}$, netrápí kalkulačku a dále nezkrátitelná iracionální čísla ve výsledku nechají.

Nakonec připomenu, že v Pikomatu hodnotíme postup řešení. Abychom měli co hodnotit, je nutný váš slovní komentář. Směsice hodnot a vzorečků nestačí a bude penalizována ztrátou bodů. Navíc pokud někde uděláte chybu, nemáme šanci hodnotit postup, byť by byl správně.

Úlohy třetí série opravovali a komentáře sepsali: 1. Marie Vonzino, 2. Tereza Ptáčková, 3. Lukáš Kubacki, 4. Jiří Štrincl a Marie Viktorinová, 5. Veronika Vohníková, 6. Martin Černý, 7. Jiří Erhart.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 3. sérii

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	*Σ*
1.–3.	1.	Michal Beránek	8. GVOP	5	3	5	5	5	5	5	-	*30*	**90**
	1.–2.	Ludmila H. Houfková	9. GMHS	5	-	5	5	5	5	5	-	*30*	**90**
		Klára Pernicová	9. GZAS	5	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**90**
4.–5.	2.	Kryštof Pravda	8. GMSP	5	5	5	5	4	5	5	-	*30*	**89**
	3.	Lukáš Frk	9. GNAP	5	5	-	5	4	5	5	-	*29*	**89**
6.–8.	4.–6.	Petr Khartskhaev	9. PORG	5	5	5	5	4	5	5	-	*30*	**88**
		Jakub Kislinger	9. GJVK	5	3	5	5	4	4	5	-	*28*	**88**
		Adéla K. Žáčková	9. GCDP	5	5	5	5	4	5	5	-	*30*	**88**
9.–13.	7.–11.	Robert Gemrot	9. GHAV	5	5	5	5	4	5	5	-	*30*	**87**
		Klára Churá	9. GCHB	5	3	5	5	4	5	5	-	*29*	**87**
		Václav Janáček	9. GKJB	5	5	-	5	4	5	5	-	*29*	**87**
		Lenka Ježková	9. PJZS	5	3	5	5	5	5	5	-	*30*	**87**
		Magdaléna Mišinová	9. GJKP	4	3	5	5	4	5	5	-	*28*	**87**
14.–16.	3.–4.	David Hájek	8. ZSJW	5	5	-	5	4	5	5	-	*29*	**86**
		Klára Hubínková	8. GMNP	5	3	5	5	3	5	5	-	*28*	**86**
	12.	Milan Malačka	9. GNAP	5	-	5	3	3	5	5	-	*26*	**86**
17.–18.	5.	Petr Hladík	8. GMNP	5	3	-	5	3	5	5	-	*26*	**84**
	13.	Mikuláš Brož	9. GNSP	5	5	1	4	4	5	5	-	*28*	**84**
19.–20.	6.	Tomáš Flídr	8. GKRO	5	3	5	5	3	5	5	-	*28*	**83**
	14.	Lubor Čech	9. GMIK	5	3	5	5	4	5	5	-	*29*	**83**
21.–22.	1.	Anna Hronová	7. GKJB	5	5	2	5	4	5	5	-	*29*	**81**
	7.	Jan Poláček	8. GBRV	5	4	5	5	5	4	5	-	*29*	**81**
23.–25.	2.	Matyáš Hebert	7. ZSKD	5	3	-	5	3	4	5	-	*25*	**80**
	15.–16.	Jan Heřta	9. GSOV	5	3	-	5	4	4	5	-	*26*	**80**
		David Kamenský	9. GBRV	5	3	1	5	-	5	5	-	*24*	**80**
26.	17.	Vladimír Chudý	9. ZSRD	5	4	1	2	2	4	5	-	*22*	**79**
27.–29.	18.–20.	Jan Schmidtmayer	9. GCAK	5	3	-	5	3	5	4	1	*24*	**78**
		Hana Slámová	9. GKJB	3	5	-	5	3	5	-	-	*21*	**78**
		Klára Zemanová	9. PORG	5	3	-	5	4	5	5	-	*27*	**78**
30.–32.	8.–10.	Josef Knápek	8. GVOL	5	3	1	5	3	5	3	-	*24*	**75**
		Martin Mlejnecký	8. GSPI	4	5	-	5	2	5	5	-	*26*	**75**
		Vlaďka Raclavská	8. SLGO	5	3	2	5	5	0	5	-	*25*	**75**
33.–36.	3.	Jan Tesařík	7. GBEN	5	5	5	5	-	3	5	-	*28*	**74**
	11.–12.	Šimon Glück	8. GPIS	5	4	2	5	5	4	5	-	*28*	**74**
		Karolína Jelínková	8. AGKP	2	3	3	3	5	5	5	-	*24*	**74**
	21.	Anna Jurtíková	9. GINT	5	3	-	4	4	5	5	-	*26*	**74**
37.–38.	13.–14.	Sára Byšková	8. ZSJZ	5	5	-	5	4	5	3	-	*27*	**73**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	*Σ*
37.–38.	13.–14.	Filip Zikeš	8. GPBZ	5	4	-	5	4	5	5	-	*28*	**73**
39.–40.	4.	Martina Lauerová	7. GNAP	3	3	1	5	1	5	5	-	*22*	**72**
	22.	Vojtěch Bořík	9. CGMN	5	3	-	5	2	5	5	-	*25*	**72**
41.–42.	15.–16.	Natálie Prušáková	8. ZSDS	5	3	-	4	5	5	5	-	*27*	**71**
		Vladimír Vávra	8. ZSJE	5	4	-	3	4	4	5	-	*25*	**71**
43.–44.	17.–18.	Radomír Mielec	8. GVOL	3	3	-	5	4	5	5	-	*25*	**70**
		Filip Vopálenský	8. MLGP	5	3	1	5	-	5	5	-	*24*	**70**
45.–47.	5.	Vanda Hutařová	7. GTMP	5	-	-	5	5	5	5	-	*25*	**69**
	19.	Martin Fried	8. GJGJ	4	3	1	5	4	4	5	-	*25*	**69**
	23.	Veronika Krčmáriková	9. GMAS	5	3	-	5	5	5	-	-	*23*	**69**
48.–49.	20.	Kateřina T. Skoupá	8. GBLA	5	3	1	5	-	5	4	-	*23*	**67**
	24.	Erik Sedlak	9. GASK	5	3	4	5	0	5	5	-	*27*	**67**
50.–51.	21.	Tomáš Čurda	8. GCDP	5	-	-	5	3	5	5	1	*22*	**66**
	25.	Julie Rubášová	9. BGBN	3	3	-	5	2	3	4	-	*20*	**66**
52.	22.	Robin Palán	8. GJGJ	4	3	1	2	1	4	5	-	*19*	**65**
53.–55.	6.–7.	Tereza Kahounová	7. CGMN	5	3	1	4	3	2	5	-	*22*	**64**
		Nikola Kášková	7. GTVL	1	4	1	3	1	5	5	-	*19*	**64**
	26.	Jana Čákorová	9. SGTP	5	3	5	5	3	5	5	-	*28*	**64**
56.–57.	8.	Lukáš Trecha	7. GZNS	5	3	-	2	5	5	3	-	*23*	**63**
	27.	Anička Hollmannová	9. GDAR	5	3	1	5	3	-	3	-	*20*	**63**
58.–59.	1.	Marek Pišťák	1. GJHP	5	-	-	5	-	5	-	-	*15*	**62**
	23.	Lenka Jenčíková	8. GCAK	5	1	-	3	3	0	5	-	*17*	**62**
60.	24.	Kryštof Veverka	8. JGNA	3	-	-	5	3	5	3	-	*19*	**59**
61.	25.	Jakub Mezera	8. ZSTR	5	-	1	5	3	5	5	-	*24*	**58**
62.–65.	2.	Adéla Hodboďová	1. ZSZE	5	2	2	3	3	5	5	-	*23*	**57**
	9.	Vojtěch Štěpán	7. GBEN	5	3	-	5	4	5	2	1	*23*	**57**
	26.–27.	Vojtěch Vařecha	8. GTIS	5	5	1	-	-	4	5	-	*20*	**57**
		Alena Zemánková	8. ZVAH	5	-	-	5	-	5	5	-	*20*	**57**
66.–69.	28.–29.	Mariia Graboviuk	8. ZPAL	3	3	1	4	1	4	5	-	*20*	**56**
		Miroslav Novotný	8. ZSTM	5	3	1	4	1	1	5	-	*19*	**56**
	28.–29.	David Ferenz	9. ZSRV	5	3	0	4	1	3	5	-	*21*	**56**
		Václav Trpišovský	9. OPEN	5	3	-	4	5	5	5	-	*27*	**56**
70.–72.	30.	Kristián Šťastný	8. GOST	5	3	3	-	-	5	4	1	*19*	**55**
	30.–31.	Kateřina Hönigerová	9. GLNS	5	3	-	5	2	2	2	-	*19*	**55**
		Tereza Janíková	9.	3	2	-	5	-	1	5	-	*16*	**55**
73.–74.	3.	Filip Hodboď	1. ZSZE	5	2	2	3	3	4	5	-	*22*	**53**
	10.	Adam Ucháč	7. ZSSJ	5	3	1	5	3	5	4	-	*25*	**53**
75.–76.	31.	Filip Absolon	8. ZSKM	2	3	1	3	2	3	5	-	*18*	**51**
	32.	Filip Gabriel	9. GCST	5	3	-	2	-	-	5	-	*15*	**51**
77.–81.	11.	Jolana Štraitová	7. GBUD	1	3	-	5	0	4	3	-	*16*	**50**
	32.–34.	Lucie Chromečková	8. ZSMK	-	-	-	-	-	5	-	-	*5*	**50**
		Ondřej Janeček	8. PORG	5	-	-	5	4	5	3	-	*22*	**50**
		Šimon Skoumal	8. PORG	5	3	-	2	1	5	5	-	*21*	**50**
	33.	Dominik Belza	9. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**50**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	Σ
82.–86.	35.–37.	Hana Bečvářová	8. GMNP	5	-	2	5	2	5	3	-	*22*	**49**
		Eliška Márová	8. ZSRA	1	0	1	5	3	0	1	-	*11*	**49**
		A. Rosenbergová	8. ZSTH	3	3	-	5	3	2	5	-	*21*	**49**
	34.–35.	Ondřej Chlubna	9. GOAO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**49**
		Karolína Letochová	9. GSTE	-	-	1	5	3	5	3	1	*16*	**49**
87.–89.	1.–2.	Tereza Bencková	6. GEKP	5	2	-	4	0	2	2	-	*15*	**48**
		Antonín Šámal	6. GFXS	5	-	-	4	4	-	4	-	*17*	**48**
	38.	Jan Šuráň	8. GSPI	5	-	-	5	3	5	5	-	*23*	**48**
90.	3.	Karolína Biolková	6. ZSEK	-	-	-	5	5	5	-	-	*15*	**45**
91.	12.	Patrik Jendele	7. ZSNZ	0	3	-	3	3	5	3	-	*17*	**44**
92.	39.	Tomáš Foral	8. ZSBL	5	3	-	3	-	-	5	-	*16*	**43**
93.	13.	Jana Horňáčková	7. ZSBC	3	3	-	5	-	5	-	-	*16*	**42**
94.–96.	1.	Patrik Rosenberg	5. ZSTH	3	-	1	5	-	1	2	-	*12*	**41**
	40.–41.	Markéta A. Doležalová	8. BGUK	-	-	-	5	2	2	3	-	*12*	**41**
		Antonín Rousek	8. GPDA	3	-	1	5	-	5	5	1	*18*	**41**
97.	36.	Kateřina Matulová	9. BGBN	-	-	-	-	-	-	4	-	*4*	**40**
98.–99.	4.	Eliška Gemperlová	6. GNKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**39**
	42.	Jindřiška Palatová	8. ZSPJ	5	-	-	-	-	-	-	-	*5*	**39**
100.–101.	5.	Michaela Štouralová	6. GSOV	-	-	-	5	-	5	-	-	*10*	**38**
	43.	Jan Kotrlík	8. GMNP	5	-	-	5	-	-	5	-	*15*	**38**
102.	37.	Eliška Dorušková	9. GRPR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**37**
103.	38.	Tomáš A. Kovanda	9. AGKP	4	5	1	3	2	5	3	-	*22*	**36**
104.–105.	6.	Šimon Genčur	6. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**35**
	44.	Antonie Erika Grant	8. AGKP	-	3	-	5	-	3	5	-	*16*	**35**
106.–108.	45.–47.	Daniela Cieslarová	8. MZSN	1	0	-	5	2	-	-	-	*8*	**34**
		Hana Pasková	8. GWOP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**34**
		Kryštof Rakovský	8. ZSJS	2	0	-	5	1	3	3	-	*14*	**34**
109.	48.	Klaudie Rampasová	8. AGKP	5	3	2	5	-	-	-	-	*15*	**33**
110.–111.	49.	Martin Černý	8. ZSNL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**32**
	39.	Jan Heřmánek	9. GKKO	5	-	-	3	-	5	5	-	*18*	**32**
112.	14.	Vojtěch Peterka	7. ZSRA	2	3	-	-	-	2	-	-	*7*	**31**
113.–117.	1.	Jiří Dittrich	4.	-	3	-	5	-	5	-	-	*13*	**30**
	7.	Martin Cornejo	6. ZBNS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
	15.–16.	Petr Hladký	7. GSRY	5	5	-	5	4	-	-	-	*19*	**30**
		Kateřina Spáčilová	7. ZSSM	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
	40.	Aleš Socha	9. ZSJC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**30**
118.–120.	17.	Rostislav Mates	7. ZSRA	2	3	-	4	-	-	-	-	*9*	**29**
	41.–42.	Doubravka Horáková	9. ZSSZ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
		Alena Šindelářová	9. GZNS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
121.–123.	18.	Světlana Dittrichová	7. ZSNN	-	-	-	5	2	5	-	-	*12*	**28**
	50.–51.	Anna Procházková	8. ZSRA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**28**
		Vítek Slanina	8. GCHB	-	3	-	5	-	-	-	-	*8*	**28**
124.–126.	8.	Filip Adam Chyška	6. AGKP	0	0	-	4	-	-	2	-	*6*	**27**
	52.	Marek Čermák	8. ZSNH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**27**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	σ	Σ
124.–126.	43.	Dominik Hrdý	9. ZSHC	5	-	-	-	-	-	-	-	*5*	**27**
127.	19.	Kateřina Holečková	7. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**26**
128.–135.	1.	Marie Steinhauserová	3. ZKNE	5	-	-	5	-	-	-	-	*10*	**25**
	20.–24.	Vít Holoubek	7. ZSTK	-	3	-	5	-	0	-	-	*8*	**25**
		Aneta Jenšíková	7. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Vojtech Kysilka	7. GRNL	5	3	4	4	4	3	5	-	*25*	**25**
		Kristýna Malcová	7. ZSMB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Marek Matúš	7. GSTR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
	53.	Thien Trang Pham Thi	8. GCHB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
	44.	Adam Kovalčík	9. ZSTV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
136.	45.	Hana Houzarová	9. ZSMS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**24**
137.–139.	46.–48.	Kateřina Brádlová	9. GPDA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Jan Hrebík	9. OPEN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Tereza Vitoušová	9. GCSP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
140.–143.	9.	Eliáš Hager	6. ZSKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	25.	Monika Krátká	7. ZSOR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	54.	Jan Vladimír Podlipný	8. ZSFK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	49.	Michal Valentík	9. CZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
144.–147.	26.	Markéta Najmanová	7. ZSFP	-	0	-	5	-	-	-	-	*5*	**21**
	50.–52.	Dominik Farhan	9. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Magdalena Petrlová	9. GKJB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Jan Vavřín	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
148.–149.	53.–54.	František Hovorka	9. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
		Gabriela Marxová	9. GDAR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
150.–152.	27.	Jan Lelek	7. ZSFC	5	-	-	3	-	-	-	-	*8*	**19**
	55.	František Bujnovský	8. CSLH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
	55.	Jan Vondráček	9. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
153.–155.	4.–5.	Aneta Bobisudová	1. ZSHC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
		Patrik Richvalský	1. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
	56.	Eliška Šebková	8. GDKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
156.–161.	10.	Daniel Janeček	6. GMBP	4	0	-	5	-	5	3	-	*17*	**17**
	28.	Jiří Bojčuk	7. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
	57.–58.	Michaela Billová	8. ZSCN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Lucie Brabencová	8. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
	56.–57.	Vojtěch Dašek	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Lada Vestfálová	9. GJER	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
162.–163.	58.–59.	Dana Dvořáčková	9. ZSBO	-	-	-	5	-	-	5	-	*10*	**15**
		Aleš Horák	9. ZSVO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**15**
164.–166.	11.	Kristýna Dominiková	6. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	29.	Marie Kukačková	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	60.	Julie Fialová	9. ZSMD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
167.–171.	12.	Matěj Jaroš	6. GJGJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	30.	Jan Chlumecky	7. GBRV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	59.–60.	Roman Malenda	8. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	Σ
167.–171.	59.–60.	Markéta Voráčková	8. ZSJK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	61.	Daniela Filipová	9. ZSVJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
172.–173.	61.–62.	Vít Jevčák	8. ZSEB	-	0	-	-	2	-	-	3	*0*	**12**
		Andrea Pospíšilová	8. GSTR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**12**
174.–176.	31.	Klára Billová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	63.	Vojtěch Stránský	8. ZOBA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	62.	Markéta Bučková	9. ZSKD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
177.–179.	6.	Eliška Tomáštíková	1. ZBUH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	32.	Vít Křivonoska	7. GVOP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	64.	Markéta Smejkalová	8. MZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
180.–181.	63.–64.	Stanislav Ježek	9. GCBR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**9**
		Martin Pacák	9. ZSCD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**9**
182.–183.	13.	Zuzana Černíková	6. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**8**
	33.	Linda Mrázová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**8**
184.	65.	Ondřej Loukotka	8. GKKO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**6**
185.–189.	14.	Tereza Pristačová	6. GOPA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	34.	Tadeáš Grabic	7. ZSAL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	66.–68.	Gwen Gonnot	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Filip Kováč	8. ZSSK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Radim Křenek	8. ZSYV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
190.–191.	69.	Long Nguyen Hoang	8. GJVK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**
	65.	Emma Pěchoučková	9. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**