PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

s posledním předvánočním letákem se vám do rukou dostává i zadání čtvrté série, jejíž termín odeslání je **6. února 2017**. Na jejím řešení byste si měli dát obzvlášť záležet, jelikož na základě výsledkové listiny po této sérii budeme vybírat účastníky jarního soustředění. To proběhne **1. – 7. 4. 2017** již tradičně v Kunžaku.

Přejeme příjemné prožití Vánoc, úspěšný vstup do roku 2017 a mnoho úspěchů při řešení.

Vaši organizátoři

Zadání úloh 4. série 32. ročníku

Termín odeslání: 6. února 2017

„Víš co? Povím ti to všechno cestou. Když jsi přijel takhle brzy, mohli bychom ještě dnes stihnout zajet do Bramhamu," navrhl jsem Davidovi, který si ani nestihl sundat kabát. Sám jsem vyměnil bílý plášť za svetr a baloňák a společně jsme vyrazili z ordinace kam jinam, než na Chadwick Market. Venku se schylovalo k již několikáté dnešní přeháňce.

„Tak už mi konečně vysvětli, kvůli čemu jsi mě sem zavolal," naléhal na mě David, když jsme se usadili do drožky.

„Před pár dny jsem byl povolán ke dvěma pacientům a u obou z nich jsem měl podezření na břišní tyfus, které teď už mám i potvrzené. Je mi ale divné, že nemají vůbec nic společného, a proto bych chtěl vypátrat, jak se mohli nakazit, neboť se objevily ještě další případy, a tak se bojím, aby nám tu nepropukla epidemie," vyložil jsem Davidovi vše, co jsem momentálně věděl. „Pátral jsem už po kdejakých zločincích, ale ještě nikdy po něčem takhle malém," zažertoval konstábl.

Když jsme projížděli vesnicí, minuli jsme tři chlapce, kteří i přes špatné počasí dováděli venku a střídali se v ježdění na kole, zatímco ostatní dva vždy poskakovali okolo. Poznal jsem mezi nimi staršího bratra Jeremyho, za jehož matkou jsme nyní jeli.

Úloha č. 1: *Středy předního a zadního kola bicyklu jsou od sebe vzdálené* 2 *yardy. Průměr obou kol je* 1 *yard. Rovina předního kola se oproti rovině zadního kola může vytočit nejvýše o* $45°$*. Jaké nejmenší kružnice může bicykl předním a zadním kolem vytvořit v bahně za předpokladu, že chlapci jezdí pomalu a při jízdě do zatáčky tak zadní kolo zůstává stále kolmo k zemi.*

Když nám matka mého malého pacienta otevírala dveře a zvala nás dál, nevypadala už tolik ustaraně jako před pár dny, ale teď spíše zvědavě. Čekala, že se konečně dozví, jak se věci mají a poněkud ji překvapilo, že přicházím v doprovodu policisty, kterého jsem jí právě představil. Vysvětlil jsem jí proto, co se děje, a začal se jí ptát, zda ji nenapadá, kde by se mohl Jeremy nakazit.

„Vůbec," zhrozila se, „vždyť tu máme čisto, a v kuchyni obzvlášť. A jinak Jeremy chodí do zdejší školy, ale obědvá až doma. A odpoledne si chodí hrát ven s dětmi ze sousedství, nebo nám pomáhá s prací kolem domu. Myslíte si, že to mohl chytit od někoho z dětí?"

„Nejspíš ne,“ řekl jsem, „pevně doufám, že ne, jinak by hrozilo, že se během několika málo dní rozstoná podobně několik dalších, a to bych nerad zažil.“

„Samozřejmě, že teď mnohem bedlivěji sleduju i svoje ostatní děti, ale všechny jsou naprosto zdravé,“ dodala ještě Jeremyho matka, než jsme se s ní rozloučili.

„Takže, pane doktore Wilkinsi,“ zeptal se mě s úšklebkem David, když jsme vyšli ven, „jestli pak víte, kam musí naše kroky směřovat teď?“

„Asi do školy,“ vydal jsem ze sebe zaskočen jeho otázkou.

„Ale Harry, vždyť jsou čtyři hodiny, tam už dávno nikoho nezastihneme. Musíme zjistit, kde bydlí místní učitel, dost pochybuji, že by dojížděl odjinud, a zajdeme přímo za ním.“

Bylo vidět, že David má v tomhle oboru hodně zkušeností, a tak jsme už zanedlouho klepali na dveře domku hned vedle školní budovy. Přišel nám otevřít muž, který již na první pohled vypadal jako podivín. Když nás pozval dovnitř a otočil se k nám zády, vyměnili jsme si zděšené pohledy na sebe a na jeho ponožky. Měl totiž na každé noze jinou.

Úloha č. 2: *Pan učitel má doma ve skříni* 50 *párů ponožek, každý v jiném z po sobě jdoucích odstínů šedi. Ráno vždy poslepu sáhne a vytáhne libovolné dvě z těchto ponožek a nasadí si je na nohy. Pokud se ponožky na jeho nohách liší nejvýše o jeden stupeň šedé, nikdo si toho nevšimne a pan učitel vypadá normálně, jinak ale vypadá jako podivín. Jaká je pravděpodobnost, že bude pan učitel v daný den vypadat normálně? (Musíme ještě dodat, že večer samozřejmě pan učitel ponožky, které nosil, vrátí zpátky do skříně, aby tam ráno měl opět všech* 50 *párů.)*

„Mohu vám nabídnout čaj? Nebo snad kávu?“ snažil se nás zdvořile pohostit.

S Davidem jsme se po jeho otázce opět na sebe podívali poněkud vyděšeně, neboť už jsme si stihli prohlédnout ten nepořádek v celém pokoji. David na mě mohutně vrtěl hlavou, a tak jsem ze sebe vykoktal, že děkujeme za nabídku, ale nemáme v plánu se dlouho zdržet. Než jsem ale stihl vůbec přikročit k tomu, abych se zeptal na zdravotní stav dětí ve škole, přerušil mě učitel svým vyprávěním.

„Jak na vás vidím, asi vás zaujaly všechny ty předměty, které tady mám. Víte, už od studia na vysoké škole mám zálibu v historii a kultuře zemí dálného východu. A jeden můj dobrý přítel občas jezdí do Číny kvůli obchodu, a tak mi vždy přiveze různé suvenýry, knihy a další. Nejvíc mě fascinuje to jejich náboženství a dodržování tradic.“ Sotva se stihl nadechnout a hned přidal jednu legendu.

Úloha č. 3: *„Vypráví se, že v jednom klášteře kdesi v horách si mniši už po dlouhá staletí udržují jisté tajné číslo a na znamení nekonečného růstu vesmíru každý rok* *v den zimního slunovratu toto číslo vynásobí* 11 *a jako tajné číslo si zapamatují tento součin. Jediné, co se komukoli podařilo zjistit je fakt, že v roce jedna našeho letopočtu po zimním slunovratu tajné číslo končilo dvojčíslím* 11*. Nyní je rok* 1907*. V kterém nejbližším roce mniši dosáhnou při zimním slunovratu tajného čísla, které bude končit stejným trojčíslím, jako končilo po slunovratu v roce jedna?"*

„To zní zajímavě a asi vím, v kterém roce to bude," řekl jsem jistým hlasem, čímž jsem učitele překvapil, takže jsem se konečně mohl chopit pořádně slova. „Ale pojďme se teď bavit o tom, kvůli čemu jsme přišli. Jak jsme vám již říkali, jde o zdravotní stav jednoho vašeho žáka, přesněji řečeno by nás zajímalo, jestli nevíte o dalších, kromě Jeremyho, kteří nedávno nějak závažně onemocněli."

Učitel se na chvíli zamyslel a pak řekl: „Je to až s podivem, vzhledem k tomu, jaké je teď počasí, ale za poslední dva týdny ve škole nechyběl nikdo kromě Jeremyho a Stuarta, který ale má prý zlomenou nohu, takže to asi není to, co by vás zrovna zajímalo."

Než jsme se stačili zvednout a rozloučit, pověděl nám ještě učitel několik zajímavostí (a ještě mnohem více nezajímavostí) o Tibetu, Japonsku a dalších zemích a tamních zvycích. Konečně jsme stáli venku.

„Teda řeknu ti, ani bych se nedivil, kdyby to chytil od něj," ušklíbl se David.

„Uznávám, nepořádek tam má, ale jak jsi sám slyšel, ostatní děti jsou nejspíš zdravé, takže se asi Jeremy musel nakazit někde jinde. Měli bychom jít trochu vyzpovídat pana Whitakera, třeba tě napadne nějaká spojitost, kterou jsem přehlédl," dodal jsem. K sídlu Whitakerů jsme se rozhodli jít pěšky, sice nebylo přímo v Bramhamu, ale znal jsem pěknou zkratku přes kopec a kolem rybníka. Už z vrcholku jsme viděli, že je kolem rybníka rušno. „Vidíš, tak tenhle rybník na zimu vypouští a dělají při tom výlov ryb, většinu prodají, ale ty menší možná jenom přemístí do jiného rybníka," začal mě hned poučovat David, který sám v Summerflow byl členem rybářského spolku.

Úloha č. 4: *Rybník má tvar kuželu a za normálních podmínek má uprostřed maximální hloubku* 3 *yardy a jeho kruhovitá hladina má průměr* 500 *yardů. Nyní z něj rybáři už vypustili polovinu objemu vody, jaká je teď jeho maximální hloubka uprostřed?*

Jakmile jsme sešli dolů, David se dal do řeči s několika rybáři a spokojeně si vyměňovali svoje zkušenosti. A co víc, po chvíli hovoru už hned domluvil, že nás popovezou aspoň kousek k městu nákladním automobilem, který má za chvíli přijet pro nachytané ryby.

Úloha č. 5: *Rybáři mají u cesty připravené ryby ve velkém množství nádob. V ma-*

lých džberech mají vždy 3 *ryby, ve větších džberech mají* 5 *ryb a v každé kádi je* 16 *ryb. Na korbu auta chtějí naložit přesně* 100 *ryb. Může se jim to povést naložením přesně* 18 *nádob, aniž by v některé z nich měnili počet ryb?*

Nakládání netrvalo dlouho a za chvíli jsme se již vezli. Když jsem viděl, jak na hrbolaté cestě ze všech kádí a džberů cáká voda, byl jsem rád, že nakonec jedeme v kabině, a ne na korbě, jak si to původně přál David. Pak už nás čekala jen slabá čtvrthodinka chůze pěšky a stáli jsme u vily továrníka Whitakera. Ten zrovna venku opečovával svůj sportovní automobil. Ačkoli pro mě před pár dny přijel s osobním šoférem, byl sám vášnivým řidičem.

„Zdravím vás, pánové, máte štěstí, že přicházíte až teď, akorát jsem před chvilkou přijel z projížďky. Dost možná, že to byla poslední letošní s tímhle kabrioletem, přece jen v dešti ta radost ze svezení není taková," řekl nám pan Whitaker, továrník a radní, na uvítání. „Pojďte dál, vypadáte podobně promrzle jako já."

Úloha č. 6: *Benzín na pumpě ve vzdálenosti* 2 *míle od vily stojí* 28 *pencí, kdežto* 22 *mil od vily je benzínka, kde je levnější. Přitom spotřeba kabrioletu je* 8 *galonů na* 100 *mil a další náklady na opotřebení a servis vozu jsou* 2 *pence na míli. Kolik by musel stát benzín na vzdálenější pumpě, aby se panu Whitakerovi vyplatilo k ní dojet a přivézt si odtamtud v kanystrech* 40 *galonů benzínu?*

Usadili jsme se u konferenčního stolku v pokoji u roztopeného krbu a náš hostitel přišel hned, co se převlékl do pohodlnějšího domácího oblečení. Hned poté mi začal děkovat za to, že jsem zachránil jeho ženě život. Na to jsem samozřejmě skromně odpověděl, že ani tak já, jako především chirurgové z nemocnice. V tu chvíli už do dveří vešla služebná s podnosem s hrnky a konvičkou. Tentokrát už jsme pohoštění samozřejmě neodmítli.

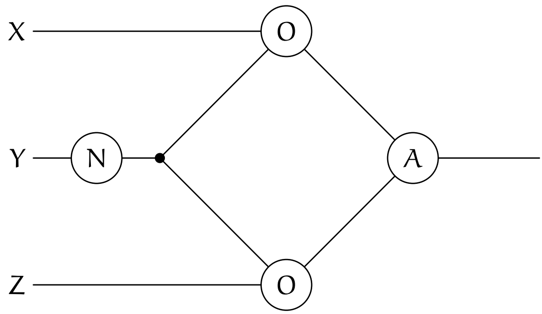
„Dáte si k čaji i něco sladkého?" nabízel pan radní, „tady Dorothy peče výborné koláče, i když sám bych je na tu svoji cukrovku asi jíst neměl, ale to víte, pane doktore, také už jsem neodolal a uždíbl si."

„Děkuji, vystačím si s čajem," odpověděl jsem zdvořile.

„A to já rád ochutnám," řekl David a rozesmál se.

Pan Whitaker vzal do ruky hromádku papírů s různými nákresy, aby udělal na stolku místo, a při pohledu na jeden z nich se zamyslel a vzápětí začal vyprávět: „Ano, tohle by vás možná mohlo zaujmout, tak jako mě. Mám tu v továrně jednoho inženýra, elektrotechnika, moc šikovný člověk, a jeho zájmem je sestavování obvodů, které umí vyhodnotit, které ze vstupů jsou zapnuté a které vypnuté, a podle toho zapnout či vypnout proud na výstupu. Možná bude lepší, když vám to vysvětlím přímo tady nad tím schématem."

Úloha č. 7: *Inženýr používá tři součástky. Jedna z nich, kterou označuje* A*, funguje jako logická konjunkce, tedy že zapne výstup pouze tehdy, když jsou zapnuté oba její vstupy. Druhá součástka, označená* O*, funguje v podstatě jako disjunkce, čili zapne výstup tehdy, když je zapnutý alespoň jeden z jejích dvou vstupů. Poslední základní součástka nese symbol* N*, na rozdíl od předchozích má jenom jeden vstup a funguje jako negace, tedy když je vstup zapnutý, vypne svůj výstup a naopak. Z těchto základních součástek si pak občas poskládá některé další, kterým pak přiřadí značku, aby nemusel ve složitějších obvodech opakovaně kreslit jejich vnitřní zapojení. A ještě bych měl doplnit, že výstup z jedné součástky lze libovolně rozvětvit (přičemž všechny větve budou mít stejnou hodnotu zapnutí/vypnutí jako větev původní), abychom ho mohli připojit do více různých součástek, ale nelze spojit výstupy ze dvou součástek přímo k sobě, aniž by se spojovali v nějaké další součástce. Když se podíváte na obrázek (obr. 1), uvidíte na něm všechny součástky, o kterých jsem mluvil. Vstupy jsou vlevo, výstup je vpravo a podle slov inženýra bude výstup tohoto obvodu zapnutý ve chvíli, kdy bude vypnutý vstup* Y*, a dále ve chvíli, kdy budou zároveň zapnuté vstupy* X *i* Z*. Navrhněte takové zapojení, které má* 5 *vstupů a jeden výstup, který se zapne právě tehdy, když bude zapnutý sudý počet vstupů.*



Obr. 1

„Vypadá to jako pěkná hračka, ale kdo ví, jestli to kdy k něčemu bude," ukončil svoji promluvu továrník.

„Velmi zajímavé," řekl jsem s uznáním, „ale chtěli jsme se vás dnes zeptat hlavně na zdravotní stav vaší ženy a možnosti, kde by se mohla nakazit."

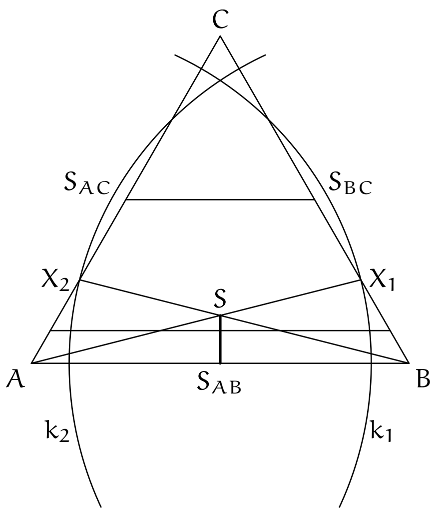
„Vidíte, zdravotní stav," pozastavil se továrník, „to byla ta věc, kterou jsem vám chtěl oznámit. Dnes ráno mi telefonovali z nemocnice, že u nich jsou tři zaměstnanci mojí továrny s podezřením na infekci."

Vzorová řešení a komentáře
k 2. sérii úloh

Úloha č. 1

Část zahrady, kam měl pradědeček prut dlouhý 9 *yardů zakopat pod zem ve vodorovné poloze, má tvar rovnostranného trojúhelníku o straně* 10 *yardů. Víme také, že celý prut je blíž ke straně trojúhelníku naléhající na stěnu domu než k nejodlehlejšímu vrcholu. Narýsujte nejkratší možnou úsečku, ve které nám stačí kopat, abychom na prut určitě narazili.*

Řešení: Celý postup budeme ilustrovat na přiloženém obrázku (obr. 2).



Obr. 2

Narýsujme si nejprve trojúhelník ABC. Dále víme, že prut se bude nacházet jen ve spodní části trojúhelníku. Narýsujme tedy střední příčku trojúhelníku ABC rovnoběžnou se stranou AB. Její krajní body označíme jako S_{AC} a S_{BC}. Celkem tedy víme, že prut se může nacházet jen v lichoběžníku $ABS_{BC}S_{AC}$. Jak v něm může být umístěn? Je třeba rozebrat krajní možnosti. Prut mohl být natažen rovnoběžně s dolní podstavou v takové výšce, aby zde šířka trojúhelníku byla právě 9 cm. Dalšími krajními možnostmi jsou situace, kdy prut vychází z bodu A nebo B.

Pokud tedy zkonstruujeme kružnici k_1 se středem v bodu A o poloměru 9 cm, nalezneme nejvyšší bod (označme X_1), kam až může prut směřovat. Podobně můžeme zkonstruovat kružnici k_2 se středem v bodu B a následně průsečík X_2. Polohu prutu by pak označovaly úsečky AX_1 a BX_2. Jak z bodu A, tak z bodu B může být prut položen i pod menším úhlem. Vidíme tedy, že abychom pokryli všechny tři mezní situace, musíme výkop volit jako úsečku SS_{AB}, kde S je průsečík úseček AX_1 a BX_2 a S_{AB} je střed strany AB.

Komentář: Řešení se dělila do třech skupin – na ta správná, na zbytečně dlouhé výkopy a na nedostatečné výkopy. Druhá skupina si buď uvědomila, kde může prut ležet, ale nevybrala správně nejkratší možný výkop, nebo vybrala velmi dlouhý výkop, u kterého bylo naprosto zřejmé, že musí prut pokrýt (např. těžnici trojúhelníku). Třetí skupina pak často brala v úvahu jen situaci, při které je prut položen rovnoběžně se stranou AB. Mírně lépe jsem obvykle hodnotil řešení, která měla jistotu nalezení prutu, ale nejednalo se o nejkratší možný výkop.

Úloha č. 2

Představme si, že plicní sklípek je krychle velikosti $100 \times 100 \times 100$*, ve které je* 1000 *bílých krvinek ve tvaru koule o průměru* 10 *vyskládaných tak, že jejich středy leží v krychlové síti. A mezi každých osm spolu sousedících krvinek je vmáčknutá bakterie ve tvaru menší koule, která se všech těchto krvinek dotýká. Spočítejte, kolik procent původního prostoru plicního sklípku nyní zabírá vzduch.*

Řešení: Kolik procent původního prostoru plicního sklípku nyní zabírá vzduch, spočítáme ze vzorce $\frac{V-(p_k \cdot V_k + p_b \cdot V_b)}{V} \cdot 100$.

Objem sklípku spočítáme jako $V = a^3 = 100^3 = 1\,000\,000$.

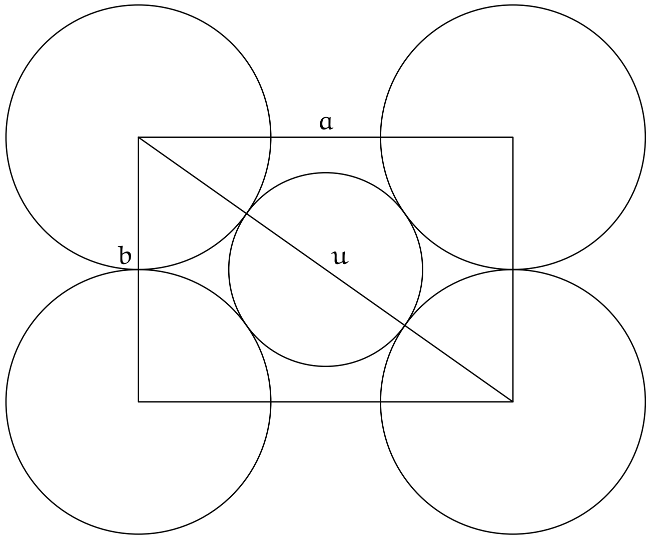
Objem krvinky zjistíme jako $V_k = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_k^3$, kde $r_k = 5$ je poloměr krvinky.

Počet krvinek máme $p_k = 1000$ ze zadání.

Objem bakterie $V_b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_b^3$, kde r_b je poloměr bakterie, který musíme spočítat.

Počet bakterií je $p_b = 9^3 = 729$, protože mezi 10 krvinkami je 9 bakterií, a to platí v každém rozměru, proto 9^3.

Chybí nám spočítat poloměr bakterie. Vezmeme krychličku složenou z osmi krvinek a jedné bakterie uprostřed. Provedeme řez, který prochází stěnovou úhlopříčkou horní a dolní podstavy, poté vzniklou polovinu krychle otočíme o 45° a dostaneme takovýhle pohled jako na obr. 3.



Obr. 3

Vezmeme si obdélník, jehož rohy jsou ve středech krvinek, jeho kratší strana je $b = 10$ a jeho delší strana je $a = 10 \cdot \sqrt{2}$, protože se jedná o úhlopříčku čtverce se stranou 10.

Nyní podle Pythagorovy věty spočítáme u, což je délka tělesové úhlopříčky krychle:

$$u = \sqrt{\left(10 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 10^2} = 10 \cdot \sqrt{3}.$$

Poloměr bakterie získáme tak, že od u odečteme dvakrát poloměr koule a vydělíme dvěma:

$$r_b = \frac{10 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 5}{2} = 5 \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

Nyní vše dosadíme do původní rovnice a dostaneme:

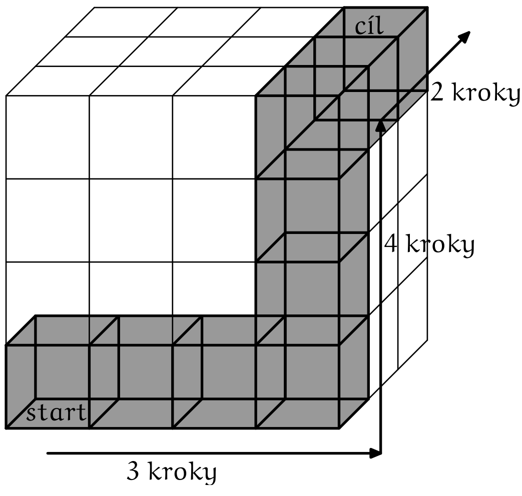
$$\frac{V - (p_k \cdot V_k + p_b \cdot V_b)}{V} \cdot 100 =$$
$$= \frac{100^3 - (1000 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 + 729 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [5 \cdot (\sqrt{3} - 1)]^3)}{100^3} \cdot 100 \doteq 32{,}67\%.$$

Komentář: Jedna z častých chyb byl počet krvinek. Mnoho lidí uvádělo 125, protože $\frac{1000}{8} = 125$, ale mezi každých osm spolu sousedících krvinek je vmáčknutá bakterie, není to samé jako bakterií je osmkrát méně, když řeknu mezi každými dvěma kluky stojí holka, tak to bude vypadat takhle: kluk, holka, kluk, holka, kluk, … a ne: kluk, holka, kluk, kluk, holka, kluk, … Další častou chybou byl výpočet poloměru bakterie. Hodně řešitelů si to zjednodušilo na úlohu v rovině, za to jsm dával 2 body. Někteří používali špatnou terminologii jako například objem kruhu. Kruh je rovinný obrazec, proto nemůže mít objem, dejte si na to pozor! Zbytečně vám to kazí řešení.

Úloha č. 3

Místní nemocnice je opravdu veliká. Má 5 pater, která všechna vypadají úplně stejně – jako obdélníková síť 3×4 chodeb, přičemž přecházet mezi patry se dá v každém uzlovém bodě této sítě. Kolik je možností, jak nejkratší cestou přejít z jihozápadního rohu v 1. patře na chirurgický sál, který je v severovýchodním rohu 5. patra?

Řešení: Na tuto úlohu existují dva až tři základní postupy. Tyto postupy si probereme postupně. Ve všech těchto úvahách víme, že nejkratší cesta trvá devět tahů a cesta se musí skládat z tahů na východ, nahoru a na sever, proto jiné tahy ani neuvažujeme (obr. 4).



Obr. 4

(1) Postupné vyplňování tabulky

Na první políčko napíšeme jedna a postupně na další píšeme součet všech čísel z políček, ze kterých tam jde jedním tahem přijít. Musíme dávat pozor, abychom v průběhu výpočtu něco nezapomněli přičíst. Takto budeme mít na každém políčku počet způsobů, jak se tam můžeme dostat, a je zřejmé, že na posledním políčku bude výsledek.

Spodní patro vyplníme jako na obr. 5.

1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

Obr. 5

V dalších patrech si musíme dát pozor, abychom vždycky započítali počet možností z předchozího patra. Druhé až páté patro popisují postupně následující obrázky (obr. 6–9).

3	12	30	60
2	6	12	20
1	2	3	4

Obr. 6

6	30	90	210
3	12	30	60
1	3	6	10

Obr. 7

Výsledek tedy je 1260.

(2) Počítání kombinačními čísly

Počítáme počet různých devític kroků, kde čtyři jsou nahoru, dva na sever a tři na východ. Počet možností, jak vybrat k věcí z n, když nezávisí na pořadí

10	60	210	560
4	20	60	140
1	4	10	20

Obr. 8

15	105	420	1260
5	30	105	280
1	5	15	35

Obr. 9

výběru, je dán tzv. kombinačním číslem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

přičemž $n!$ značí $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Podobně můžeme dojít k tomu, že vybrat z devíti kroků čtyři nahoru, tři na východ a dva na sever lze $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$ způsoby. Odpovídá to úvaze, že celkový počet možností, jak proházet devět věcí je 9!. Protože ale nerozeznáme pořadí 4 kroků nahoru, vydělíme počet možností 4!, ani nerozeznáme pořadí dvou na sever ani tří kroků na východ, takže ještě děleno $3! \cdot 2!$.

Častěji jste ale úlohu počítali postupně tak, že jste zjistili počet možností, jak projít spodní patro, který je 10, protože z pěti kroků vybíráme dva (na sever), tedy $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10$ (nebo výčtem). A potom jst vybírali z devíti kroků pět vodorovných (nebo čtyři nahoru), tedy $\binom{9}{4} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = 126$. Protože ve všech prvních variantách mohou být všechny druhé varianty, tyto mezivýsledky vynásobíme a vyjde nám správný výsledek $126 \cdot 10 = 1260$.

Komentář: Téměř všichni řešitelé pochopili zadání správně, ale několik řešitelů, po spočítání spodního patra, došlo k závěru, že dál neví jak pokračovat. Potom byla skupina s částečně správnými postupy, ale i mezi těmi, kteří správný postup znali, bylo mnoho řešitelů, kteří se někde přepočítali, a proto jim vyšel špatný výsledek. Nikdo, kdo neměl správný výsledek, nedostal plný počet bodů.

Úloha č. 4

„Čtvrtina našich pacientů dostává acylpyrin proti horečce, šestina dostává živočišné uhlí kvůli průjmům a devítina všech pacientů potřebuje dokonce oba tyto

léky. No a počet pacientů, kteří nedostávají ani jeden z těchto léků, je dělitelný deseti. Tak co, víte, kolik nejméně pacientů teď máme na oddělení?“

Řešení: Víme, že čtvrtina pacientů dostává acylpyrin, šestina živočišné uhlí a devítina dokonce oboje. Sečteme-li počet pacientů, kteří dostávají acylpyrin, a počet pacientů, kteří dostávají živočišné uhlí, dostaneme počet pacientů, kteří dostávají acylpyrin, nebo živočišné uhlí. Ale pozor! Přihodila se nám nemilá věc. Máme pacienty, kteří dostávají oba léky, to ale znamená, že jsme je započítali dvakrát – jednou, protože dostávají acylpyrin a ještě jednou, protože dostávají živočišné uhlí – musíme je tedy jednou odečíst. Správně je tedy počet pacientů, kteří dostávají alespoň jeden z léků, roven $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{11}{36}$ ze všech a počet pacientů, kteří nedostávají ani jeden z léků je tím pádem tvoří $\frac{25}{36}$ z celkového počtu. Všimneme si, že celkový počet pacientů musí být násobkem šestatřiceti a $\frac{25}{36}$ z tohoto počtu musí být dělitelná deseti. Číslo 36 tuto podmínku nesplňuje, ale 72 (nejmenší větší násobek šestatřiceti) už ano. Nejmenší možný počet pacientů je tedy 72.

Komentář: Drobným chytákem této úlohy nebylo přijít na správný postup řešení, ale uvědomit si, že pacienti, kteří berou oba léky, jsou už započítaní v každé z „podskupin“ (pacientů beroucích jen acylpyrin a pacientů na živočišném uhlí). Za řešení, kde tato úvaha chyběla, jsme proto dávali nejvíce tři body. Jiné „chyby“ skoro nebyly, takže jsme byli bodově docela štědří.

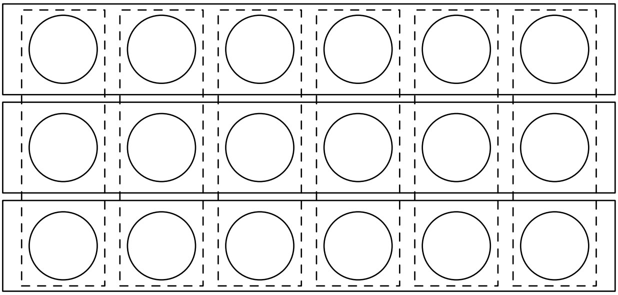
Úloha č. 5

„Laboranti věděli, že ze zkoumaných 18 *vzorků právě dva obsahovaly tyfovou bakterii, ale výsledky se jim přeházely. Aby nemuseli dělat osmnáct nových testů na přítomnost bakterie, poradil jsem jim, že mohou vždy smíchat kousky několika vzorků k sobě a otestovat na přítomnost bakterie tuto vzniklou směs. Dokážou tak poznat, zda v některém původním vzorku bakterie byla, nebo zda byly všechny negativní, ale už nedokážou rozlišit, zda byla v jednom, nebo ve dvou ze smíchaných vzorků. Jaký postup jsem jim poradil, aby jim stačilo provést pouze 9 testování?“*

Řešení: Uvedu dle mého názoru jedno z elegantnějších řešení, jak nalézt, které dva prvky jsou nakaženy.

Vzorky si rozdělím do „tabulky“ o rozměrech 3×6 a otestuji tak, jak je vidět na obrázku (obr. 10).

Z toho, jak bylo provedeno testování, se dá jednoznačně prokázat, kde se nakažené vzorky s tyfem nacházejí. „Řádkové“ testování nám nejprve určí, v které skupině se vzorek nachází. „Sloupcové“ testování poté zjistí konkrétní umístění



Obr. 10

prvku v šestici. Snadno lze ověřit, že pokud budou 2 prvky v jednom sloupci, pomocí „řádkového“ testování zjistíme, kde ve sloupci se nacházejí, a zároveň nám vyjde pozitivní pouze jeden test na sloupce. Pokud budeme mít 2 prvky v jednom řádku, vyjdou pozitivně 2 „sloupcové“ testy. Pokud budou oba prvky v rozdílných řádcích a rozdílných sloupcích, „řádkové“ a „sloupcové“ testování přesně určí, v kterém řádku a kterém sloupci se který daný nakažený prvek nachází.

Komentář: Řešení této úlohy mělo několik variant. Nejčastěji řešitelé zvolili varianty, kde se začalo rozdělením 18 vzorků na 3 skupiny po 6 vzorcích, 4 skupiny po 4 a 1 po 2 vzorcích, nebo 6 skupin po 3 vzorcích.

Nejdůležitější u takovéto úlohy je rozebrat všechny případy, které mohou nastat. Často někteří řešitelé ztráceli body na tom, že neuvedli, co má laborant provést, když nastane některý výsledek měření, a to je problém. Intuitivně je to v pořádku, u složitějších úloh se nedá tak snadno spoléhat na intuici a správný matematický důkaz proto musí rozbor všech případů obsahovat. Ještě druhá možnost by byla rozebrat pouze nejhorší případ. Pro to by bylo třeba ještě dokázat, že se skutečně o nejhorší případ jedná.

A nakonec biologická a češtinářská vložka: Tyfus je onemocnění bakteriálního, nikoli virového původu. Zároveň se skloňuje do druhého pádu jako tyfu, nikoli tyfusu. ;)

Úloha č. 6

Jedna sestra totiž chodila pacientům kontrolovat, zda jim kape infuze, a každých 7 minut se vracela udělat záznam. Druhá sestřička, která chodila měřit krevní tlaky a zapisovat výsledky, se vracela každých 12 *minut. A ta třetí, která chodila* *měřit teploty, se kvůli zapisování výsledků vracela vždy po 15 minutách. Směna jim všem začala přesně v sedm hodin ráno a s jinými sestrami se vystřídají přesně v deset hodin večer. Kolikrát za směnu se takto všechny tři spolu setkají?*

Řešení: Sestřičky byly tři, každá se z měření vracela po určitém časovém intervalu. Úkolem je zjistit, kdy se potkávaly. Abych věděl, kolikrát se potkají za směnu, tak musím zjistit, s jakými intervaly se schází a kolikrát se vejde tento interval do délky směny. Nejdříve délka směny. Vím, že sestřičky začaly směnu v $7:00$ a skončily $22:00$. Odečtu a dostanu 15 hodin, neboli 900 minut. Teď interval, za který se viděly všechny tři. To bude nejmenší společný násobek jejich tří intervalů. Abych ho zjistil, tak si musím jednotlivá čísla rozložit na prvočísla:

$$\begin{aligned} 7 &= 7, \\ 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3, \\ 15 &= 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

Nejmenší společný násobek bude součin prvočísel, které se v různých řádcích neopakují. Když se opakují v jednom řádku, tak je musím roznásobit všechny:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

Zjistil jsem, že všechny tři sestřičky se potkaly poprvé po 420 minutách od začátku a poté zase každých dalších 420 minut. Vydělím si délku směny tímto intervalem a zaokrouhlím dolů, abych věděl, kolikrát se potkají před koncí směny:

$$\frac{900}{420} \doteq 2.$$

Během směny se potkají dvakrát. Pokud by se potkaly i na začátku, tak celkový počet setkání bude tři, pokud i na konci, tak čtyři.

Komentář: Naprostá většina byla správně vypočítaná, jediná věc, co chyběla, byla diskuze, jestli se sestřičky potkají i na začátku a na konci. Někteří také neumí najít nejmenší společný násobek, což je škoda, když jinak mají celý postup správně.

Úloha č. 7

Během psaní jsem si všiml, že z onoho osmiciferného čísla lze vybrat čtyři číslice tak, že jejich součin je druhou mocninou celého čísla. Ukažte, že takto lze čtyři číslice vybrat z každého osmiciferného čísla.

Řešení: Úlohu budeme řešit sporem. To znamená, že budeme předpokládat, že existuje osmiciferné číslo (označme ho x), ze kterého nemůžeme vybrat čtyři číslice požadovaným způsobem. Pokusíme se dojít k nějakému sporu, z čehož vyvodíme, že náš předpoklad nebyl správný, a tudíž žádné takové číslo neexistuje.

Nejprve si uvědomme, co vyplývá ze samotného zadání. Druhá mocnina celého čísla zahrnuje i 0^2. Pokud je jedna z cifer součinu 0, je i součin 0, takže x určitě neobsahuje 0. Z obdobných důvodů nemůže obsahovat dva nebo více párů stejných číslic. Tedy zbývají pouze dvě možnosti:

(1) x obsahuje osm různých nenulových číslic,

(2) x obsahuje jednu nenulovou číslici alespoň dvakrát a zbylé jednou.

Přitom nezávisí na pořadí, v jakém jsou cifry seřazeny.

Vyřešme nyní problém pro devíticiferné číslo 123 456 789. Najděme všechny čtyřciferné kombinace, jejichž součin je druhou mocninou celého čísla. Jsou to:

$$C = \{1236, 1248, 1289, 1368, 2346, 2369, 2489, 3468, 3689\}.$$

Vzhledem k vlastnostem (1) a (2), dostaneme číslo x tak, že z čísla 123 456 789 vyškrtneme jednu cifru a případně ještě nahradíme některé další cifry jednou číslicí, která je různá od 0 a první vyškrtnuté cifry.

Nejprve si rozmysleme, že vyškrtnutím jedné z cifer $1, 4, 5, 7, 9$ vždy splníme požadavky zadání. Nyní tuto myšlenku dokážeme. V osmiciferném čísle zbude dostatek čtveřic z C tak, že i kdybychom pak vyškrtli ještě jednu libovolnou cifru, našli bychom nějakou čtveřici z C i ve zbylém sedmiciferném čísle.

Řešíme tedy už jen vyškrtnutí cifer $2, 3, 6, 8$. Po libovolném vyškrtnutí jedné z nich z 123 456 789 nám zbudou v nově vzniklém osmiciferném čísle právě tři různé čtveřice z C. Označme je X. Například pro 3 je $X = \{1248, 1289, 2489\}$. Pro spor musíme tyto čtveřice eliminovat. Jediný způsob, jak toto udělat, je nahradit jednu cifru jinou tak, že v osmiciferném čísle vytvoříme pár dvou stejných cifer. Pokud nahradíme cifru společnou pro všechny tři čtveřice z X (v našem případě 2 nebo 8), vznikne pár cifer, který bude tvořit s ciframi 4 a 9 součin splňující podmínku ze zadání. V žádném případě nemají všechny tyto čtveřice společnou 4 nebo 9, takže buď budou zachovány nějaké čtveřice z X, nebo vznikne nová ve tvaru $AA49$. Toto platí analogicky pro číslo se třemi stejnými ciframi. Zároveň jsme tímto prozkoumali všechna osmiciferná čísla. Tím dostaneme spor s předpokladem, že lze najít takové osmiciferné číslo, pro které by zadání neplatilo, čímž je důkaz proveden.

Řešení podle Michala Beránka:

Řešme úlohu sporem, tedy hledejme číslo, které nesplňuje zadání. Hned vyloučíme cifru 0. Snadno si totiž rozmyslíme, že $\sqrt{0} = 0$, 0 je celé číslo, a protože výsledek součinu obsahujícího 0 je vždy 0, nesmíme ji v čísle použít. Zároveň taky vyloučíme situace, ve kterých jsou dvě nebo více dvojic stejných čísel, protože $\sqrt{a \cdot a \cdot b \cdot b} = a \cdot b$ a protože a, b jsou celá čísla, tak $a \cdot b$ jsou také. Mezi ciframi $1 - 9$ jsou 3 druhé mocniny – čtverce $(1, 4, 9)$, 4 prvočísla $(2, 3, 5, 7)$ a 2 další složená čísla $(6 = 2 \cdot 3, 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2)$. Pokud použiji alespoň dva čtverce, musím přidat šest, respektive pět dalších cifer, aby bylo číslo kompletní. Pro pět použiji cifry 5 a 7, protože nemají mezi zbylými ciframi své násobky. Stále musíme doplnit tři cifry. Cifry $2, 3, 6$ a 8 spolu tvoří tři různé čtverce, a to sice $2, 3, 6$, dále $8, 3, 6$ a $2, 8$, z kterých ale, po vynechání libovolné cifry, vždy zbude alespoň jedna. Pokud máme jen jeden čtverec, rozmysleme si, že 2 s 8 a 3 s 6 jsou zaměnitelné, a proto přidejme BÚNO (Bez Újmy Na Obecnosti) všechny prvočíselné cifry. Zbývá nám tedy doplnit ještě tři cifry. Jejich přidáním buď vzniknou dvě dvojice druhých mocnin (2×8, nebo opakující se cifra), nebo vznikne jedna ze dvou trojic $2, 3, 6$ nebo $8, 3, 6$ a ty s naším čtvercovým číslem opět dají číslo ze zadání. Pokud nepoužiji žádný čtverec, mám k dispozici jen šest různých cifer, takže vznikne vždycky buď jedna nezávislá dvojice a dvojice $2, 8$ nebo dvě nezávislé dvojice. Tím dostáváme spor a tedy zadání platí.

Komentář: Úloha byla těžká, proto se ve většině řešení objevily alespoň drobné chyby či byla řešení jen částečná. V důkazu musí být rozebrány všechny případy daného problému. Všechna tvrzení musí být podepřena logickou posloupností kroků.

Úlohy druhé série opravovali a komentáře sepsali: 1. Vojtěch Kika, 2. Jiří Štrincl, 3. František Steinhauser , 4. Jan Erhart, 5. Martin Černý, 6. Lukáš Kubacki, 7. Vít Kalisz.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK

po 2. sérii

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	*Σ*
1.–6.	1.	Michal Beránek	8. GVOP	5	3	5	5	5	5	5	-	*30*	**60**
	1.–5.	Lukáš Frk	9. GNAP	-	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**60**
		Ludmila Hana Houfková	9. GMHS	5	5	5	5	5	5	-	-	*30*	**60**
		Jakub Kislinger	9. GJVK	5	4	5	5	5	5	5	-	*30*	**60**
		Milan Malačka	9. GNAP	5	5	-	5	5	5	5	-	*30*	**60**
		Klára Pernicová	9. GZAS	5	5	5	5	5	5	2	-	*30*	**60**
7.–8.	2.	Kryštof Pravda	8. GMSP	5	5	4	5	5	5	5	-	*30*	**59**
	6.	Magdaléna Mišinová	9. GJKP	5	4	5	5	5	5	3	-	*29*	**59**
9.–14.	3.–4.	Petr Hladík	8. GMNP	5	5	3	5	5	5	3	-	*28*	**58**
		Klára Hubínková	8. GMNP	5	4	5	5	5	5	4	-	*29*	**58**
	7.–10.	Klára Churá	9. GCHB	5	5	5	5	4	5	3	-	*29*	**58**
		Václav Janáček	9. GKJB	-	5	4	5	5	5	5	-	*29*	**58**
		Petr Khartskhaev	9. PORG	5	5	4	3	5	5	4	-	*28*	**58**
		Adéla Karolína Žáčková	9. GCDP	-	5	5	5	5	5	5	-	*30*	**58**
15.–19.	5.	David Hájek	8. ZSJW	5	5	2	3	5	5	5	-	*28*	**57**
	11.–14.	Robert Gemrot	9. GHAV	5	3	5	5	5	5	2	-	*28*	**57**
		Vladimír Chudý	9. ZSRD	5	5	4	5	1	5	5	-	*29*	**57**
		Lenka Ježková	9. PJZS	5	5	3	3	5	5	4	-	*27*	**57**
		Hana Slámová	9. GKJB	5	5	2	5	5	5	2	-	*27*	**57**
20.–21.	15.–16.	Mikuláš Brož	9. GNSP	1	5	5	3	5	5	4	-	*27*	**56**
		David Kamenský	9. GBRV	5	5	-	5	5	5	5	-	*30*	**56**
22.–23.	1.	Matyáš Hebert	7. ZSKD	-	5	5	3	5	5	2	-	*25*	**55**
	6.	Tomáš Flídr	8. GKRO	-	3	4	5	5	5	3	-	*25*	**55**
24.–26.	17.–19.	Lubor Čech	9. GMIK	3	4	4	3	5	5	3	-	*24*	**54**
		Jan Heřta	9. GSOV	5	4	3	5	5	5	0	-	*27*	**54**
		Jan Schmidtmayer	9. GCAK	2	5	5	5	5	5	1	1	*26*	**54**
27.–28.	2.	Anna Hronová	7. GKJB	5	3	-	1	4	5	5	-	*23*	**52**
	7.	Jan Poláček	8. GBRV	5	5	2	5	5	5	-	-	*27*	**52**
29.–30.	8.	Josef Knápek	8. GVOL	5	5	2	5	5	5	1	-	*27*	**51**
	20.	Klára Zemanová	9. PORG	5	5	3	3	5	5	-	-	*26*	**51**
31.–34.	3.	Martina Lauerová	7. GNAP	2	4	3	5	4	5	-	-	*23*	**50**
	9.–10.	Karolína Jelínková	8. AGKP	5	4	1	3	1	5	5	-	*23*	**50**
		Vlaďka Raclavská	8. SLGO	5	3	5	5	-	5	-	-	*23*	**50**
	21.	Dominik Belza	9. GBIB	5	1	1	5	5	5	-	-	*22*	**50**
35.–36.	11.	Martin Mlejnecký	8. GSPI	-	-	5	5	5	5	1	-	*21*	**49**
	22.	Ondřej Chlubna	9. GOAO	5	5	2	4	5	5	-	-	*26*	**49**
37.	23.	Anna Jurtíková	9. GINT	5	-	5	3	2	5	3	-	*23*	**48**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	σ	Σ
38.–39.	1.	Marek Pišťák	1. GJHP	-	-	2	5	5	5	-	-	*17*	**47**
	24.	Vojtěch Bořík	9. CGMN	5	5	5	5	5	5	-	-	*30*	**47**
40.–47.	4.	Jan Tesařík	7. GBEN	2	3	-	5	5	5	0	-	*20*	**46**
	12.–16.	Sára Byšková	8. ZSJZ	5	2	-	3	5	5	-	-	*20*	**46**
		Šimon Glück	8. GPIS	5	5	3	3	3	2	0	-	*21*	**46**
		Robin Palán	8. GJGJ	3	3	3	3	3	5	2	-	*20*	**46**
		Vladimír Vávra	8. ZSJE	3	2	-	3	5	5	3	-	*21*	**46**
		Filip Vopálenský	8. MLGP	-	5	1	5	5	5	-	-	*21*	**46**
	25.–26.	Veronika Krčmáriková	9. GMAS	5	5	2	3	0	5	-	-	*20*	**46**
		Julie Rubášová	9. BGBN	2	3	-	5	5	5	0	-	*20*	**46**
48.–51.	5.	Nikola Kášková	7. GTVL	3	3	1	5	5	5	2	-	*23*	**45**
	17.–19.	Lucie Chromečková	8. ZSMK	5	-	5	5	5	5	-	-	*25*	**45**
		Lenka Jenčíková	8. GCAK	2	5	2	5	5	5	1	-	*24*	**45**
		Radomír Mielec	8. GVOL	5	-	-	5	-	5	1	-	*16*	**45**
52.–56.	6.	Vanda Hutařová	7. GTMP	5	5	-	1	5	5	-	-	*21*	**44**
	20.–23.	Tomáš Čurda	8. GCDP	3	3	4	3	4	5	-	1	*21*	**44**
		Martin Fried	8. GJGJ	2	4	1	3	3	5	0	-	*18*	**44**
		Natálie Prušáková	8. ZSDS	5	-	3	5	2	5	1	-	*21*	**44**
		Kateřina Tereza Skoupá	8. GBLA	5	5	1	3	4	5	0	-	*23*	**44**
57.	27.	Anička Hollmannová	9. GDAR	5	3	2	1	5	5	1	-	*21*	**43**
58.	7.	Tereza Kahounová	7. CGMN	3	2	1	4	5	5	0	-	*20*	**42**
59.–61.	8.	Lukáš Trecha	7. GZNS	-	3	-	5	5	5	-	-	*18*	**40**
	24.	Kryštof Veverka	8. JGNA	-	5	-	3	-	5	-	-	*13*	**40**
	28.	Erik Sedlak	9. GASK	0	3	2	1	2	5	1	-	*14*	**40**
62.–63.	1.	Eliška Gemperlová	6. GNKP	-	-	-	5	5	5	-	-	*15*	**39**
	29.	Tereza Janíková	9.	2	2	1	4	-	5	0	-	*14*	**39**
64.	25.	Eliška Márová	8. ZSRA	1	4	1	3	3	5	0	-	*17*	**38**
65.–68.	26.–28.	Miroslav Novotný	8. ZSTM	5	3	2	1	0	5	0	-	*16*	**37**
		Vojtěch Vařecha	8. GTIS	-	5	-	3	-	5	-	-	*13*	**37**
		Alena Zemánková	8. ZVAH	-	-	-	5	-	5	-	-	*10*	**37**
	30.	Eliška Dorušková	9. GRPR	5	5	1	3	-	5	0	-	*19*	**37**
69.–74.	29.–30.	Mariia Graboviuk	8. ZPAL	5	2	1	1	3	3	0	-	*15*	**36**
		Kristián Šťastný	8. GOST	-	3	-	3	-	5	0	-	*11*	**36**
	31.–34.	Jana Čákorová	9. SGTP	5	3	3	3	-	5	-	-	*19*	**36**
		Filip Gabriel	9. GCST	5	3	-	3	4	5	0	-	*20*	**36**
		Kateřina Hönigerová	9. GLNS	2	2	-	3	3	5	1	-	*16*	**36**
		Kateřina Matulová	9. BGBN	-	2	-	2	1	5	-	-	*10*	**36**
75.–76.	2.	Šimon Genčur	6. BGBN	2	3	3	5	1	5	2	-	*20*	**35**
	35.	David Ferenz	9. ZSRV	2	1	-	5	0	5	0	-	*13*	**35**
77.–82.	2.	Adéla Hodboďová	1. ZSZE	1	1	3	2	0	5	1	-	*13*	**34**
	9.–10.	Vojtěch Štěpán	7. GBEN	3	3	-	2	0	5	0	-	*13*	**34**
		Jolana Štraitová	7. GBUD	5	1	1	2	-	5	0	-	*14*	**34**
	31.–33.	Jakub Mezera	8. ZSTR	-	3	-	5	-	5	-	-	*13*	**34**
		JIndřiška Palatová	8. ZSPJ	5	3	-	-	-	3	-	-	*11*	**34**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	Σ
77.–82.	31.–33.	Hana Pasková	8. GWOP	2	2	-	5	1	5	0	-	*15*	**34**
83.–85.	3.	Tereza Bencková	6. GEKP	2	-	1	3	5	5	-	-	*16*	**33**
	34.	Filip Absolon	8. ZSKM	2	2	2	2	4	5	0	-	*17*	**33**
	36.	Karolína Letochová	9. GSTE	-	3	-	3	0	5	0	1	*10*	**33**
86.	35.	Martin Černý	8. ZSNL	-	-	-	-	-	5	-	-	*5*	**32**
87.–88.	3.	Filip Hodboď	1. ZSZE	1	1	2	2	0	5	1	-	*12*	**31**
	4.	Antonín Šámal	6. GFXS	1	-	-	5	-	5	-	-	*11*	**31**
89.–91.	5.–6.	Karolína Biolková	6. ZSEK	-	-	5	-	5	5	-	-	*15*	**30**
		Martin Cornejo	6. ZBNS	2	2	1	1	-	5	-	-	*11*	**30**
	11.	Kateřina Spáčilová	7. ZSSM	-	-	-	5	5	5	-	-	*15*	**30**
92.–97.	1.	Patrik Rosenberg	5. ZSTH	2	1	1	2	2	5	-	-	*13*	**29**
	36.–37.	Mark. Anna Doležalová	8. BGUK	-	-	-	5	-	4	-	-	*9*	**29**
		Šimon Skoumal	8. PORG	2	1	-	2	0	5	0	-	*10*	**29**
	37.–39.	Doubravka Horáková	9. ZSSZ	5	-	-	3	-	5	-	-	*13*	**29**
		Alena Šindelářová	9. GZNS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
		Václav Trpišovský	9. OPEN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**29**
98.–102.	7.	Michaela Štouralová	6. GSOV	-	-	-	5	5	5	-	-	*15*	**28**
	12.	Adam Ucháč	7. ZSSJ	5	-	1	5	3	5	1	-	*20*	**28**
	38.–40.	Ondřej Janeček	8. PORG	5	-	-	1	-	3	0	-	*9*	**28**
		Anna Procházková	8. ZSRA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**28**
		Alex. Rosenbergová	8. ZSTH	3	1	-	2	0	5	-	-	*11*	**28**
103.–107.	13.	Patrik Jendele	7. ZSNZ	-	-	-	4	5	5	-	-	*14*	**27**
	41.–44.	Hana Bečvářová	8. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**27**
		Marek Čermák	8. ZSNH	3	-	-	2	1	5	-	2	*9*	**27**
		Tomáš Foral	8. ZSBL	3	-	-	3	-	5	-	-	*11*	**27**
		Filip Zikeš	8. GPBZ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**27**
108.–110.	14.–15.	Kateřina Holečková	7. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**26**
		Jana Horňáčková	7. ZSBC	-	3	-	1	-	5	-	-	*9*	**26**
	45.	Daniela Cieslarová	8. MZSN	3	-	-	2	-	5	-	-	*10*	**26**
111.–116.	16.–18.	Aneta Jenšíková	7. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
		Kristýna Malcová	7. ZSMB	2	-	-	3	-	5	-	-	*10*	**25**
		Marek Matúš	7. GSTR	-	-	-	-	2	5	-	-	*7*	**25**
	46.–47.	Thien Trang Pham Thi	8. GCHB	-	-	-	3	3	5	1	-	*12*	**25**
		Jan Šuráň	8. GSPI	-	-	-	1	-	5	-	-	*6*	**25**
	40.	Adam Kovalčík	9. ZSTV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**25**
117.–118.	19.	Vojtěch Peterka	7. ZSRA	3	-	-	2	-	5	-	-	*10*	**24**
	41.	Hana Houzarová	9. ZSMS	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**24**
119.–123.	48.–49.	Jan Kotrlík	8. GMNP	-	-	-	3	0	5	-	-	*8*	**23**
		Antonín Rousek	8. GPDA	-	-	-	1	5	-	0	-	*6*	**23**
	42.–44.	Kateřina Brádlová	9. GPDA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Jan Hrebík	9. OPEN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
		Tereza Vitoušová	9. GCSP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**23**
124.–129.	8.	Eliáš Hager	6. ZSKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
	20.	Monika Krátká	7. ZSOR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	*Σ*
124.–129.	50.	Jan Vladimír Podlipný	8. ZSFK	-	-	-	2	-	5	-	-	*7*	**22**
	45.–47.	Dominik Hrdý	9. ZSHC	-	-	-	3	-	5	-	-	*8*	**22**
		Aleš Socha	9. ZSJC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
		Michal Valentík	9. CZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**22**
130.–133.	9.	Filip Adam Chyška	6. AGKP	4	-	-	2	-	5	-	-	*11*	**21**
	48.–50.	Dominik Farhan	9. GMNP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Magdalena Petrlová	9. GKJB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
		Jan Vavřín	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**21**
134.–138.	21.	Rostislav Mates	7. ZSRA	-	3	-	-	3	5	-	-	*11*	**20**
	51.–52.	Kryštof Rakovský	8. ZSJS	1	-	1	1	0	5	-	-	*8*	**20**
		Vítek Slanina	8. GCHB	2	-	-	-	-	5	-	-	*7*	**20**
	51.–52.	František Hovorka	9. GBIB	-	-	-	1	0	5	-	-	*6*	**20**
		Gabriela Marxová	9. GDAR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**20**
139.–141.	22.	Antonie Erika Grant	7. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
	53.	František Bujnovský	8. CSLH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
	53.	Jan Vondráček	9. GNAP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**19**
142.–145.	4.–5.	Aneta Bobisudová	1. ZSHC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
		Patrik Richvalský	1. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
	54.–55.	Klaudie Rampasová	8. AGKP	-	2	-	3	0	5	-	-	*10*	**18**
		Eliška Šebková	8. GDKL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**18**
146.–152.	1.	Jiří Dittrich	4.	5	-	-	2	5	5	-	-	*17*	**17**
	23.–24.	Jiří Bojčuk	7. GBIB	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Vít Holoubek	7. ZSTK	-	-	1	2	-	5	-	-	*8*	**17**
	56.–57.	Michaela Billová	8. ZSCN	-	-	-	3	-	5	-	-	*8*	**17**
		Lucie Brabencová	8. GMNP	5	4	-	3	-	5	-	-	*17*	**17**
	54.–55.	Vojtěch Dašek	9. PORG	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
		Lada Vestfálová	9. GJER	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**17**
153.–154.	25.–26.	Světlana Dittrichová	7. ZSNN	5	-	-	2	4	5	-	-	*16*	**16**
		Markéta Najmanová	7. ZSFP	-	-	-	-	-	5	-	-	*5*	**16**
155.–156.	1.	Marie Steinhauserová	3. ZKNE	-	-	2	5	-	-	-	-	*7*	**15**
	56.	Aleš Horák	9. ZSVO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**15**
157.–162.	10.	Kristýna Dominiková	6. BGBN	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	27.	Marie Kukačková	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
	57.–60.	Julie Fialová	9. ZSMD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
		Jan Heřmánek	9. GKKO	-	-	-	-	-	5	-	3	*2*	**14**
		Tomáš Ant. Kovanda	9. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
		Michael Zábojník	9. ZSBJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**14**
163.–167.	11.	Matěj Jaroš	6. GJGJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	28.	Jan Chlumecky	7. GBRV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	58.–59.	Roman Malenda	8. ZSOK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
		Markéta Voráčková	8. ZSJK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
	61.	Daniela Filipová	9. ZSVJ	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**13**
168.–169.	60.–61.	Vít Jevčák	8. ZSEB	2	2	-	-	-	-	-	-	*4*	**12**
		Andrea Pospíšilová	8. GSTR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**12**

Celkově	*V roč.*	*Jméno a příjmení*	*Roč. a škola*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*P*	*σ*	*Σ*
170.–174.	29.–31.	Klára Billová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
		Petr Hladký	7. GSRY	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
		Jan Lelek	7. ZSFC	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	62.	Vojtěch Stránský	8. ZOBA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
	62.	Markéta Bučková	9. ZSKD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**11**
175.–177.	6.	Eliška Tomáštíková	1. ZBUH	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	32.	Vít Křivonoska	7. GVOP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
	63.	Markéta Smejkalová	8. MZSV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**10**
178.–179.	63.–64.	Stanislav Ježek	9. GCBR	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**9**
		Martin Pacák	9. ZSCD	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**9**
180.–181.	12.	Zuzana Černíková	6. GFMP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**8**
	33.	Linda Mrázová	7. GSOV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**8**
182.	64.	Ondřej Loukotka	8. GKKO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**6**
183.–188.	13.	Tereza Pristačová	6. GOPA	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	34.	Tadeáš Grabic	7. ZSAL	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	65.–67.	Gwen Gonnot	8. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Filip Kováč	8. ZSSK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
		Radim Křenek	8. ZSYV	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
	65.	Dana Dvořáčková	9. ZSBO	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**5**
189.–190.	68.	Long Nguyen Hoang	8. GJVK	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**
	66.	Emma Pěchoučková	9. AGKP	-	-	-	-	-	-	-	-	*0*	**4**

Vysvětlivky

První sloupec ve výsledkové listině udává celkové pořadí řešitele po druhé sérii, druhý sloupec pak pořadí redukované na řešitele v příslušném ročníku školní docházky (což umožňuje lépe porovnávat stejně staré řešitele mezi sebou).

Školy jsou uvedeny kódy. Seznam škol naleznete níže. Sloupce označené číslicemi 1 až 7 udávají počet bodů získaný za jednotlivé úlohy. Ve sloupci se záhlavím P je bodový postih pro tuto sérii za pozdní odeslání. Ve sloupci se záhlavím σ je celkový počet bodů za druhou sérii a konečně ve sloupci označeném Σ je celkový počet bodů, které řešitel zatím získal.

Seznam škol

AGKP	Arcibiskupské gymnázium Praha
BGBN	Biskupské gymnázium Brno
BGUK	Biskupské gymnázium Žďár nad Sázavou
CGMN	Církevní gymnázium Plzeň
CSLH	CZŠ sv. Ludmily Hradec nad Moravicí
CZSV	CZŠ Veselí nad Moravou
GASK	Gymnázium Alejová Košice
GBEN	Gymnázium Benešov

GBIB	Biskupské gymnázium B. Balbína Hradec Králové
GBLA	Gymnázium Blansko
GBRV	Gymnázium Břeclav
GBUD	Gymnázium Budějovická Praha 4
GCAK	Gymnázium Čakovice Praha 9
GCBR	Gymnázium Český Brod
GCDP	Gymnázium Christiana Dopplera Praha 5
GCHB	Gymnázium Cheb
GCSP	Gymnázium Českolipská Praha 9
GCST	Gymnázium Josefa Božka Český Těšín
GDAR	Gymnázium Dr. Antona Randy Jablonec nad Nisou
GDKL	Gymnázium Dvůr Králové nad Labem
GEKP	Gymnázium Elišky Krásnohorské Praha 4
GFMP	Gymnázium F. M. Pelcla Rychnov nad Kněžnou
GFXS	Gymnázium F. X. Šaldy Liberec
GHAV	Gymnázium Komenského Havířov
GINT	Gymnázium INTEGRA Brno
GJER	Gymnázium a SOŠPg Liberec
GJGJ	Gymnázium J. G. Jarkovského Praha 1
GJHP	Gymnázium J. Heyrovského Praha 5
GJKP	Gymnázium J. Keplera Praha 6
GJVK	Gymnázium J. Vrchlického Klatovy
GKJB	Gymnázium tř. kpt. Jaroše Brno
GKKO	Křesťanské gymnázium Praha 10
GKRO	Gymnázium Kroměříž
GLNS	Gymnázium, SOŠ a VOŠ Ledeč nad Sázavou
GMAS	Masarykovo gymnázium Příbor
GMHS	Gymnázium a Hudební škola Hlavního města Prahy Praha 3
GMIK	Gymnázium, SOŠ a SOU Mikulov
GMNP	Gymnázium Mikulášské náměstí Plzeň
GMSP	Mensa gymnázium Praha 6
GNAP	Gymnázium Nad Alejí Praha 6
GNKP	Gymnázium Nad Kavalírkou Praha 5
GNSP	Gymnázium Nad Štolou Praha 7
GOAO	GOA Orlová-Lutyně
GOPA	Gymnázium Opatov Praha 4
GOST	Gymnázium Ostrov
GPBZ	Gymnázium Petra Bezruče Frýdek-Místek
GPDA	Gymnázium Dašická Pardubice
GPIS	Gymnázium Písek
GRPR	Gymnázium Rožnov pod Radhoštěm
GSOV	Gymnázium a SOŠe Vimperk
GSPI	Gymnázium Špitálská Praha 9
GSRY	Gymnázium a SOŠ Rýmařov
GSTE	Gymnázium Šternberk
GSTR	Gymnázium Stříbro
GTIS	Gymnázium Tišnov
GTMP	Gymnázium Thomase Manna Praha 8
GTVL	Gymnázium Vlašim
GVOL	Gymnázium Volgogradská Ostrava
GVOP	Gymnázium Voděradská Praha 10
GWOP	Wichterlovo gymnázium Ostrava-Poruba
GZAS	Gymnázium a ZUŠ Šlapanice
GZNS	Gymnázium Žďár nad Sázavou
JGNA	Jiráskovo gymnázium Náchod

MLGP	Malostranské gymnázium Praha
MZSN	Masarykova základní škola Návsí
MZSV	Masarykova základní škola Vracov
OPEN	Open Gate - gymnázium Říčany
PJZS	První jazyková základní škola Praha 4
PORG	První obnovené reálné gymnázium Praha 8
SGTP	Sportovní gymnázium Plzeň
SLGO	Slovanské gymnázium Olomouc
ZBNS	ZŠ Bílovice nad Svitavou
ZBUH	ZŠ Babice Uherské Hradiště
ZKNE	ZŠ Kněžice
ZOBA	ZŠ a MŠ Osová Bítýška
ZPAL	ZŠ Palmovka Praha 8
ZSAL	ZŠ Alešova Vodňany
ZSBC	ZŠ a MŠ Bzenec
ZSBJ	ZŠ T. G. Masaryka Bojkovice
ZSBL	ZŠ Bernarda Bolzana Tábor
ZSBO	ZŠ Bobrová
ZSCD	ZŠ Český Dub
ZSCN	ZŠ a MŠ Čkyně
ZSDS	ZŠ Dukelská Strakonice
ZSEB	ZŠ a MŠ Edvarda Beneše Písek
ZSEK	5. ZŠ Frýdek - Místek
ZSFC	ZŠ F. L. Čelakovského Strakonice
ZSFK	ZŠ Františka Křižíka Bechyně
ZSFP	6. ZŠ Frýdek-Místek
ZSHC	7. ZŠ Hornická Chomutov
ZSJC	ZŠ a MŠ Staré Město
ZSJE	ZŠ Jeseniova Praha
ZSJK	ZŠ Jana Ámose Komenského Karlovy Vary
ZSJS	Zš Jiráskovy sady Příbram 2
ZSJW	ZŠ Jana Wericha Praha 6
ZSJZ	ZŠ náměstí Jiřího z Poděbrad Praha 3
ZSKD	ZŠ Křídlovická Brno
ZSKL	ZŠ Kladská Praha 2
ZSKM	ZŠ K Milíčovu Praha 4
ZSMB	ZŠ Měšťanská Brno
ZSMD	ZŠ T. G. Masaryka Praha 4
ZSMK	ZŠ dr. Milady Horákové Kopřivnice
ZSMS	ZŠ Malá Strana Týn nad Vltavou
ZSNH	ZŠ Nový Hrádek
ZSNL	ZŠ Ledeč nad Sázavou
ZSNN	1. ZŠ Nové Město na Moravě
ZSNZ	ZŠ Nezvěstice
ZSOK	ZŠ Okružní Zlín
ZSOR	ZŠ Okříšky
ZSPJ	ZŠ Pasířská Jablonec n.N.
ZSRA	2. ZŠ Rakovník
ZSRD	ZŠ Ronov nad Doubravou
ZSRV	ZŠ Kravaře
ZSSJ	ZŠ Sion J. A. Komenského Hradec Králové
ZSSK	ZŠ a MŠ Středokluky
ZSSM	ZŠ Staré Město
ZSSZ	ZŠ Svaté Zdislavy Kopřivnice
ZSTH	ZŠ Tuháčkova Brno
ZSTK	ZŠ kpt. Jaroše Třebíč
ZSTM	ZŠ Miroslav
ZSTR	ZŠ Josefa Hory Třešť
ZSTV	ZŠ T. G. Masaryka Vimperk II
ZSVJ	ZŠ Vincence Junka Dolní Čermná
ZSVO	ZŠ Oslavická Velké Meziříčí
ZSYV	ZŠ Sychrov Vsetín
ZSZE	ZŠ Jana Václava Sticha-Punta Žehušice
ZVAH	ZŠ Vančurova Hodonín