

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

děkujeme všem, kteří se zapojili do první série letošního ročníku, a doufáme, že naplnila vaše očekávání. V tomto letáku k vám přichází výsledková listina po první sérii spolu se zadáními následujících dvou sérií. Termín pro odeslání druhé série je **28. listopadu 2016**. Termín pro odeslání třetí série je **2. ledna 2017**. Obzvláště nováčci mezi řešiteli Pikomatu si po první sérii mohou poctivě projít jak svá opravená řešení, tak ta vzorová, aby zjistili, jaké nedostatky mělo jejich řešení a jak se vyvarovat bodovým ztrátám. Mezi obvyklé problémy patří nedostatečný komentář číselných výpočtů, případně neúplná odpověď na úlohy k nalezení čísel s požadovanou vlastností. U těchto je třeba vysvětlit, proč to kromě vámi uvedených nemohou být žádná jiná.

Formát elektronických úloh

Rádi bychom jen připomněli, že elektronické odevzdávání v TEPu probíhá ve formátu PDF. Tento formát vzniká při uložení souboru. Pokud uložíte soubor v jiném formátu (JPG, PNG, apod.) a pouze přepíšete koncovku souboru, neuděláte z něj soubor formátu PDF. Uděláte z něj pouze **nečitelný soubor**, taková řešení nemůžeme opravit. Proto vás žádáme o nahrávání pouze ve formátu PDF.

Návratky

Důležitým krokem po první sérii bývají návratky. Stejně tak je tomu i letos. Po přihlášení do TEPu budete vyzváni k překontrolování osobních údajů. Bez jejich potvrzení nebudete moci nahrávat úlohy. Při problémech se změnou údajů, případně jejich nesprávném zadání, kontaktujte na zmena@pikomat.mff.cuni.cz.

Besídka

A pro netrpělivé – ano, plánujeme Vánoční besídku! Tentokrát se bude konat v sobotu **17. prosince 2016**. Bližší informace naleznete s dostatečným předstihem na našich internetových stránkách spolu s pokynem, jak se přihlásit.

Hodně zábavy a úspěchů při řešení přeji

Vaši organizátoři

Zadání úloh 2. série 32. ročníku

Termín odeslání: 28. listopadu 2016

Když jsem vystupoval z automobilu před rodinným sídlem Whitakerů, byla skoro tma. Pršet sice už přestalo, ale oblohu stále zahalovala těžká mračna, která příchod soumraku ještě umocňovala. Velký cihlový dům působil poněkud ponuře a ještě tíživěji snad vypadala okolní zahrada obehnaná zdí. Část zahrady za domem byla nyní rozkopaná.

„Víte,“ začal vysvětlovat radní Whitaker, „dlouhá léta se traduje, že zde někde můj pradědeček ukryl část svého jmění v podobě zlatého prutu. Rozhodl jsem se to nyní ověřit. Ne snad proto, že bych měl peněz málo, to je vám asi jasné, ale čistě z dobrého rozmaru, abych pro jednu tuto historku potvrdil, nebo vyvrátil.“

Úloha č. 1: *Část zahrady, kam měl pradědeček prut dlouhý 9 yardů zakopat pod zem ve vodorovné poloze, má tvar rovnostranného trojúhelníku o straně 10 yardů. Víme také, že celý prut je blíž ke straně trojúhelníku naléhající na stěnu domu než k nejodlehlejšímu vrcholu. Narýsujte nejkratší možnou úsečku, ve které nám stačí kopat, abychom na prut určitě narazili.*

Ještě jsme ani nestihli dojít ke dveřím domu, když se otevřely a vyběhla z nich služebná volajíc: „Pane doktore, pojdte honem nahoru, paní je opravdu zle.“ Přidal jsem proto do kroku sleduje služebnou a následován těsně za zády panem Whitakerem. Vyšli jsme takto až do druhého patra, kde na konci chodby služebná otevřela dveře do potměšlého pokoje a rozsvítila.

Jakmile jsem vešel dovnitř, bylo mi jasné, že je situace opravdu vážná. Paní Whitakerová ležela skrčená v posteli, a teprve když jsem ji hlasitě oslovil, jen pootevřela oči a cosi zamumlala. V obličeji byla bledá a celá opocená, z jejího čela sálalo teplo, ale ruce naopak měla úplně ledové. Jako první jsem samozřejmě pomýšlel na zápal plic, a proto jsem vytáhl z brašny fonendoskop, abych zjistil, zda uslyším trubicovitě dýchání. Při zápalu plic jsou totiž plíce plné pneumokoků a bílých krvinek, a tak se jimi snadno přenáší zvuk z dýchacích cest.

Úloha č. 2: *Představme si, že plicní sklípek je krychle velikosti $100 \times 100 \times 100$, ve které je 1000 bílých krvinek ve tvaru koule o průměru 10 vyskládaných tak, že jejich středy leží v krychlové síti. A mezi každých osm spolu sousedících krvinek je vmáčknutá bakterie ve tvaru menší koule, která se všech těchto krvinek dotýká. Spočítejte, kolik procent původního prostoru plicního sklípku nyní zabírá vzduch.*

Paní Whitakerová však dýchala jen velmi povrchně, a tak jsem neslyšel téměř nic, jen srdce, které tlouklo jako o život. Pak jsem postoupil na vyšetření břicha. Jakmile jsem na něj sáhl, zjistil jsem, že je tvrdé jako kámen, a navíc při doteku pacientka zasténala bolestí. „Je to opravdu vážné,“ řekl jsem, „sám jí tu nedokážu pomoci, nejspíš má silný zánět žlučníku, takže musí být okamžitě operována.“

Ani ne za pět minut už jsme tedy seděli opět v automobilu a mířili k nemocnici, odkud jsem se sotva před pár hodinami vrátil. Když jsme nemocnou vykládali na lehátko, byla už téměř v bezvědomí, a proto jsme museli spěchat co nejrychleji na chirurgický sál.

Úloha č. 3: *Místní nemocnice je opravdu velká. Má 5 pater, která všechna vypadají úplně stejně - jako obdélníková síť 3 × 4 chodeb, přičemž přecházet mezi patry se dá v každém uzlovém bodě této sítě. Kolik je možností, jak nejkratší cestou přejít z jihozápadního rohu v 1. patře na chirurgický sál, který je v severovýchodním rohu 5. patra?*

Radní Whitaker zůstal čekat na chodbě, zaskočen tím, jaký spád nabraly události. Já jsem se rozhodl mezitím využít toho, že jsem opět v nemocnici, a zajít se podívat na infekční oddělení, jak se daří Jeremymu. Lékaři se mezitím vystřídali, a tak jsem teď na inspekčním pokoji narazil na starého profesora Ironse. Pamatoval jsem si ho ještě z dob, kdy jsem tady v nemocnici krátce po promoci stážoval. Vždycky s oblibou drtil mediky a mladé lékaře záludnými otázkami a tahle záliba ho neopustila, jak jsem se brzy přesvědčil.

Úloha č. 4: *„Čtvrtina našich pacientů dostává acylpyrin proti horečce, šestina dostává živočišné uhlí kvůli průjmům a devítina všech pacientů potřebuje dokonce oba tyto léky. No a počet pacientů, kteří nedostávají ani jeden z těchto léků, je dělitelný deseti. Tak co, víte, kolik nejméně pacientů teď máme na oddělení?“*

Naštěstí jsem se jeho otázkou nenechal zaskočit a vzápětí jsme se už dali do cela přátelsky do řeči. Sdílel mi, že Jeremy pookřál, jen co mu trochu doplnili tekutiny a minerály. Jedním dechem ale dodal, že se mu nelíbí celá tato situace. Prý je to totiž už osmý pacient za poslední týden s podezřením na břišní tyfus. Trochu samolibě jsem se pousmál, že se možná opravdu můj odhad vyplnil.

„Vzorky od prvních dvou pacientů už máme dokonce potvrzené,“ začal profesor vyprávět, „i když s tím ze začátku měli v laboratoři problém. Pomíchaly se jim totiž vzorky, a tak jsme nevěděli, od koho jsou ty pozitivní.“

„To je nemilé,“ zhodnotil jsem tuto situaci, „zopakovat všechny testy muselo trvat strašně dlouho a navíc to zdvojnásobilo cenu vyšetření.“

„Mýlíte se, Johne,“ přerušil moje úvahy profesor a já na něj chvíli nechápavě zíral, „navrhl jsem jim totiž postup, díky kterému se výrazně ušetřil čas i peníze.“

Úloha č. 5: *„Laboranti věděli, že ze zkoumaných 18 vzorků právě dva obsahovaly tyfovou bakterii, ale výsledky se jim přeházely. Aby nemuseli dělat osmnáct nových testů na přítomnost bakterie, poradil jsem jim, že mohou vždy smíchat kousky několika vzorků k sobě a otestovat na přítomnost bakterie tuto vzniklou směs. Dokážou tak poznat, zda v některém původním vzorku bakterie byla, nebo zda byly všechny negativní, ale už nedokážou rozlišit, zda byla v jednom, nebo ve dvou ze smíchaných vzorků. Jaký postup jsem jim poradil, aby jim stačilo provést pouze 9 testování?“*

„To je úžasné, tohle by mě nenapadlo,“ složil jsem profesoru Ironsovi poklonu.

„Ten postup možná úžasný je, jsem na něj hrdý, ale rozhodně není úžasně to, co se nám tady rozbíhá. To není samo sebou, aby se po dlouhé době klidu tak náhle vyrojilo tolik případů tyfu najednou!“

„Máte pravdu, už když jsem sem vezl Jeremyho, pomýšlel jsem na tyfus, ale zároveň tuto myšlenku zapuzoval, protože už se zde dlouho nevyskytl. Jestli chcete, rád vám pomůžu vypátrat možný zdroj nákazy,“ těmito slovy jsem se chtěl rozloučit a odejít, ale nebylo mi to tak úplně hladce umožněno, neboť se právě ve dveřích potkaly a daly do řeči tři sestřičky. Vypadalo to, jako by se už dlouhou dobu neviděly a vzápětí mi z jejich povídání došlo proč.

Úloha č. 6: *Jedna sestra totiž chodila pacientům kontrolovat, zda jim kape infuze, a každých 7 minut se vracela udělat záznam. Druhá sestřička, která chodila měřit krevní tlaky a zapisovat výsledky, se vracela každých 12 minut. A ta třetí, která chodila měřit teploty, se kvůli zapisování výsledků vracela vždy po 15 minutách. Směna jim všem začala přesně v sedm hodin ráno a s jinými sestrami se vystřídají přesně v deset hodin večer. Kolikrát za směnu se takto všechny tři spolu setkají?*

Když si to v rychlosti pověděly a začaly se opět rozcházet za svou prací, proklouzl jsem kolem nich s letným úsměvem a vydal se chodbami na vrátnici nemocnice. Věděl jsem totiž, že úkol, o který jsem se přihlásil, se mi bude mnohem lépe plnit, nebudu-li na něj sám. Naškrábal jsem proto na papírek krátký vzkaz, který začínal osmiciferným služebním číslem, a předal jej vrátnému s prosbou, aby jej co nejdříve poslal jako telegram do Summerflow.

Úloha č. 7: *Během psaní jsem si všiml, že z onoho osmiciferného čísla lze vybrat čtyři číslice tak, že jejich součin je druhou mocninou celého čísla. Ukažte, že takto lze čtyři číslice vybrat z každého osmiciferného čísla.*

Zadání úloh 3. série 32. ročníku

Termín odeslání: 2. ledna 2017

Policejní konstábl Dawid Lewis měl ve zvyku chodit do práce už kolem šesté hodiny ráno, aby došel na stanici ještě dříve, než se začnou střídat směny a přicházet ostatní policisté do denní služby. Mohl si díky tomu v klidu promluvit s muži o tom, co se dělo v noci, a poté si v klidu začít procházet úřední dokumenty, které ještě neměl vyřízené. A zrovna dnes ráno bylo na stanici až překvapivě živo. Strážníci, kteří měli v noci službu, se teprve před půl hodinou vrátili. Byli totiž zavoláni ke kurióznímu případu, ze kterého mu teď dali přečíst právě sepsané hlášení:

Dne 7. 10. v 1:10 oznámil na stanici James Tarlton, že zaslechl podivné zvuky v lese mezi Highwoodem a Summerflow. Dle jeho slov se tudy vracel domů z Highwoodu, kde v místní hospodě zapíjel narození kamarádova syna. Krátce po půlnoci (čas nebyl schopen uvést přesně, neboť neměl hodinky) zaslechl podezřelé zvuky, které mu připomínaly řezání dříví, což mu bylo v tuto noční hodinu krajně podezřelé, a tak se rozhodl celou událost okamžitě nahlásit. Vzhledem k patrnému oslabení duševních funkcí ohlašovatele panovaly nejprve pochybnosti o věrohodnosti oznámení, nakonec se však v 1:40 vypravila dvojčlenná hlídka na popsané místo. Zde byli ve 2:50 dopadeni tři muži při nelegální těžbě dřeva. Při pokusu o zadržení se dali na útěk a vzhledem k náročným terénním podmínkám nebyli dopadeni. Na místě činu bylo zajištěno několik dřevorubecských nástrojů, viz příložený seznam, jeden nákladní automobil a vytěžené dřevo, které bylo řádně zdokumentováno a označeno, aby se zabránilo jeho prodeji do doby vyšetření případu.

Úloha č. 1: *Před řáděním zlodějů rostlo v inkriminovaném úseku lesa 20 % dubů a 80 % buků. Zloději se vzhledem k vyšší výkupní ceně snažili kácet spíše buky, ale protože vše dělali potmě, bylo ze všech stromů, které pokáceli, 90 % buků, ale k tomu 10 % dubů. Když policisté zajišťovali oblast, zjistili, že z 50 % buků, které zde původně rostly, už zbyly pouze pařezy. Kolik procent z nepokácených stromů nyní tvoří buky?*

„Koukám, že jste se v noci nenudili,“ řekl konstábl Lewis trochu posměšně. Vzápětí dodal: „Ta zpráva je docela dobrá, Martine, jen některé výrazy mi připadají spíše jako vzaté z vyprávění od sousedky než z úředního dokumentu, ale uvidíte, že si brzy svůj styl vytříbíte.“ Na to se mladší strážník jen pousmál. „Po-

čkejte,“ zarazil se najednou konstábl Lewis, „píšete tady, že byl na místě zajištěn nákladní automobil?“

„Ano, zloději menší dříví ještě na místě řezali na polínka a tímto automobilem je odváželi nejspíš o několik vesnic dál, aby ho tam mohli prodat,“ podal bez zaváhání vysvětlení mladší strážník. „Byl to, pravda, trochu oříšek dát ho do pohybu, neboť je na parní pohon s kotlem právě na dřevo, ale nakonec se nám to povedlo, takže teď stojí na dvoře za stanicí, jestli jste si ho ještě nevšiml.“

Úloha č. 2: *Na nákladní automobil se vejde maximálně 1 000 polínek. Na každých 30 ujetých yardů spotřebuje automobil jedno polínko. Kolik nejvíce polínek dokážou zloději dopravit ke svému odběrateli vzdálenému 30 000 yardů, mají-li na začátku v lese 3 000 polínek? (Polínka lze kdekoliv po cestě složit.)*

Konstábla očividně zpráva o zabaveném stroji překvapila, a tak se šel rychle podívat z okna na chodbě, co za stroj se jim to objevilo na dvoře. Teprve pak konečně zamířil ke stolu ve své pracovně, na němž ležela různá lejstra a nedokončené dokumenty. Jelikož David Lewis rád pracoval při otevřeném okně, musel si všechny papíry ukládat pod těžítko, aby se mu v průvanu nerozlétly.

Úloha č. 3: *Těžítko bylo tvořeno dráty pospojovanými jako hrany pravidelného čtyřstěnu. Uvnitř tohoto čtyřstěnu byla vložena největší možná skleněná koule, která se tím pádem dotýkala všech drátů a přesahovala přes stěny tohoto čtyřstěnu. V této kouli byl zalitý druhý drátěný pravidelný čtyřstěn, jehož vrcholy se dotýkaly povrchu koule. Určete poměr délek hran většího a menšího čtyřstěnu.*

Ani se však nestihl do prvního hlášení začíst, když na dveře zatukal a okamžitě vstoupil jeden z jeho kolegů. „Pojď se, Davide, honem podívat, co právě dorazilo za telegram,“ řekl mu a hned zase ze dveří zmizel.

Když konstábl vyšel z kanceláře, rovnou mu hlouček udivených policistů podával papírek, na kterém stálo:

„83214967 Víím moc dobře o případu Edingtonových. Dostav se rychle, však ty víš, kde mě hledat!“

Když si vzkaz přečetl, na chvíli strnul a pak prohlásil: „Vždyť je to pro mě, to je moje služební číslo.“

Úloha č. 4: *Jako všechna policejní služební čísla, i toto mělo ty vlastnosti, že na lichých pozicích mělo sudé cifry a na sudých liché, a zároveň bylo dělitelné jedenácti. Jaké nejmenší přirozené číslo má tyto vlastnosti?*

„Ano, vypadá to tak, také jsme si toho všimli,“ řekl Davidovi velitel, „ale zajímalo nás, jak budeš reagovat. Napadá tě, co by to mohlo znamenat?“

„Vražda v rodině Edingtonových, to už je hodně dávno,“ začal konstábl vzpomínat, „stalo se to před čtyřmi roky. Byl to nakonec docela zajímavý případ a . . .“ V tu chvíli se zarazil. V hlavě se mu udělalo jasno, ale pokusil se udržet tajemnou tvář. „Už asi tuším, o co jde. Opravdu bych to měl rychle vyřešit. Považuji to ale spíš za svoji soukromou záležitost, a proto bych vás chtěl požádat o pár dní volna.“

„Trochu se mi, Davide, nelíbí, abys někde pátral na vlastní pěst, ale znám tě dobře a věřím, že bys nic zbrklého neudělal,“ řekl velitel.

„Nebojte, nic špatného se nestane. A až se vrátím, všechno vám vysvětlím.“ S těmi slovy se konstábl natáhl do své pracovny pro kabát a čepici a opustil policejní stanici.

Na nádraží doběhl velmi rychle, a tak poté, co si koupil lístek do Londýna, ještě chvíli čekal, než vůbec přijel vlak. Během čekání přemítal o tom, co se asi bude odehrávat, až dorazí na místo určení. Při tom se díval na mozaiku na stěně a ta ho najednou vytrhla ze zamyšlení.

Úloha č. 5: *Všiml si, že každý řádek je dlouhý 12 palců a je sestavený z obdélníků délky 1, 3 nebo 5 palců (nemusí být použity všechny a mohou se samozřejmě opakovat). A především si všiml, že každý řádek je jiný, co do pořadí použitých obdélníků. Kolik nejvíce řádků může mít taková mozaika?*

Jakmile vlak přijel, nastoupil, aby si mohl co nejlépe vybrat prázdné kupé. Jedno takové skutečně našel a už se zaradoval, že bude mít klidnou a ničím nerušenou cestu. Naneštěstí však do vlaku na poslední chvíli ještě vběhli dva muži a samozřejmě se rozhodli obsadit téměř prázdné kupé, ve kterém seděl pouze David. A aby té směly a jejich drzosti nebylo málo, jeden z mužů jej poznal a ihned začal svému druhovi hlásit, že to s nimi jede policejní konstábl ze Summerflow a že ten by určitě mohl být nestrannou a spravedlivou osobou, která je rozsoudí.

Úloha č. 6: *Každý z těchto dvou mužů si totiž myslel své přirozené číslo, ale navzájem si ho nechtěli říct. Rozhodli se proto, že oba pošeptají své číslo konstáblu Lewisovi a ten jim pak, v libovolném pořadí, řekne součet těchto dvou čísel a jedno náhodné číslo. Když tak opravdu učinili, řekl jim konstábl 1 000 a 2 000. Na to první muž popravdě přiznal, že vážně netuší, jaké číslo si myslel jeho kamarád. Dokáže už druhý muž určit číslo toho prvního? Jak?*

Celému jejich handrkování se David divil, nechápal dost dobře, o jaká čísla jde, že s nimi dělají takové složitosti. Na druhou stranu však zapudil svoji zvědavost a raději se jich na nic neptal, bál se totiž, že by se s ním o tom ještě začali bavit,

a na to momentálně neměl náladu.

Konečně kolem druhé hodiny odpolední vystoupil z vlaku a lehce zavzpomínal, kterou cestou se má dát. Paměť ho však neklamala a po půlhodině chůze už stál před ordinací praktického lékaře, kterou dobře poznal podle znaku ve štítu domu.

Úloha č. 7: *Ve znaku se propojeny nacházely rovnostranný trojúhelník a čtverec, oba o stejném obvodu. Jaký byl poměr jejich obsahů?*

Konstábl Lewis vešel do čekárny, která zela prázdnotou, a tak po chvilce váhání zaklepal na dveře ordinace. Ozvalo se jen zrudlé „dále“. Vzal proto za kliku a vstoupil dovnitř.

Zvedl jsem oči od stolu, abych se podíval na dalšího pacienta, ale s překvapením jsem zjistil, že proti mně nikdo takový nestojí. „No ne, to jsem ani nečekal, že přijedeš už tak brzy,“ uvítal jsem nadšeně svého přítele.

„Musím ti říct, Harry, že jsi dnes ráno způsobil pěkný rozruch na naší stanici tím svým telegramem,“ řekl mi s úsměvem a už mě plácal po ramenou.

„Já vím, počítal jsem s tím. Však si taky vzpomeň, jaké uvítání jsi mi před čtyřmi roky připravil ty. Musel jsem ti to oplatit aspoň trochu. Ale dost bylo toho, určitě tě zajímá, proč jsem tě žádal o pomoc,“ změnil jsem téma rozhovoru, na což David jen dychtivě přikývl.

Vzorová řešení a komentáře k 1. sérii úloh

Úloha č. 1

Srážkoměr byl kužel o výšce 150 mm a průměru podstavy 300 mm, samozřejmě otočený vrcholem dolů a bez podstavy, aby do něj mohla přšet voda. V jaké výšce nad vrcholem má být na srážkoměru ryska s číslem 5, která značí 5 mm srážek, neboli to, že na 1 m² plochy spadne 5 litrů vody?

Řešení: V úloze je třeba vypočítat několik věcí. Musíme nejprve určit, kolik vody naprší do kužele. Zadruhé budeme muset určit, jaký je vztah mezi vodou napršenou do kužele a ryskou, kterou na kužel zakreslíme, abychom určili přesnou hodnotu (výška hladiny v kuželu nebude odpovídat reálné výšce hladiny, která naprší na zem). Nejprve musíme určit objem vody napršené. Plocha, na kterou dopadá voda do kužele, se rovná jeho podstavě, protože kužel je otočen podstavou vzhůru. Tu vypočteme vztahem $S = \pi \cdot r^2$. Objem vody se rovná množství vody, které by napršelo do válce s podstavou daného kužele a výškou 5 mm. ($V = S \cdot 5 \text{ mm}$) Pokud jste se dostali ve svých výpočtech až sem, získali jste 2 body.

Těd už víme, jaké množství vody do kuželu naprší, pokud naprší 5 mm srážek. Kdybychom vzaly kužel s tímto množstvím vody, snadno bychom určili, kam rysku zakreslit (hladina vody v kuželu by nám jasně určila výšku). My ale dokážeme určit výšku kuželu, pokud známe jeho objem. Využijeme vztah ze vzorce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v \cdot \frac{1}{3}$. V této části vzniklo nejvíce chyb řešitelů. Většina těchto chyb spočívala v tom, že si řešitel určil poměr mezi objemem celého a menšího kužele, následně čeho tento poměr aplikoval i na výšku menšího kužele. (konkrétně poměr 3 : 1). Bohužel tato přímá úměra ne vždy platí a to i v tomto případě. Zde konkrétně má myšlenka chybu v tom, že pokud uřízneme část kužele od vrcholu, nezmění se pouze výška, ale i poloměr kuželu. Stačí nám ale provést ještě jedna, trochu odlišná úvaha. Z rozměrů kuželu na začátku jsme dostali informaci, že výška a poloměr původního kužele se rovnají ($v = 150 \text{ mm}$, $d = 300 \text{ mm}$ což znamená $r = 150 \text{ mm}$, $v = r$). Pomocí podobnosti můžeme určit, že i u našeho nově vzniklého, menšího kužele tento vztah bude platit. Můžeme tedy dosadit do vzorce: $r = v$ a tak $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v^3$. Upravováním vzorce vyjádříme $v = 3 \sqrt{\frac{3V}{\pi}}$. Do tohoto vzorce nyní můžeme dosadit dříve odvozený

vzoreček pro objem: $V = \pi \cdot r^2 \cdot 5 \text{ mm}$ a tak $v = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 5}{\pi}} \text{ mm}$. Výsledná výška v by měla být přibližně 69,62 mm, lze zaokrouhlit na 7 cm.

Úloha č. 2

Nejzajímavější křížovka měla název 3D Sudoku. Zadání jsou 4 čtverce 4×4 představující jednotlivá patra krychle $4 \times 4 \times 4$. Úkolem luštitelce je doplnit do prázdných buněk číslice od 1 do 4 tak, aby se neopakovaly v žádném řádku, sloupcu ani svislém sloupci. Navíc když z krychle vybereme libovolný čtverec 4×4 (v kterékoli rovině) a rozdělíme jej na čtyři čtverce 2×2 , tak i tyto malé čtverce musejí obsahovat každou z číslic 1 – 4 právě jednou. Vyřešte zadané 3D Sudoku (obr. 1).

| | | | |
|--|---|--|---|
| | | | |
| | | | 2 |
| | 1 | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | 3 | | |
| | | | |
| 1 | | | |

| | | | |
|--|--|--|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | 4 |
| | | | |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | | |
| | | | |
| | | 2 | |
| | | | |

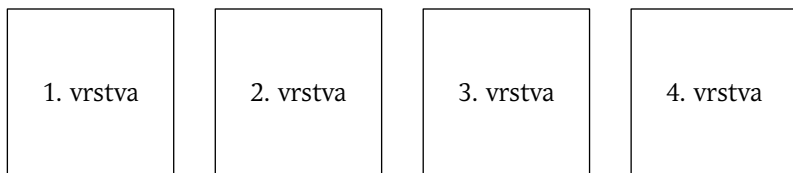
Obr. 1

Řešení: Ve vzorovém řešení používáme následující značení: Černá čísla jsou ta, která jsme získali z minulého kroku, nebo ze zadání. Šedá jsou ta, která v popísaném kroku nalézáme.

| | |
|------------|------------|
| 1. čtverec | 2. čtverec |
| 3. čtverec | 4. čtverec |

Obr. 2

1. podmínka: čísla se nesmí opakovat v žádném řádku, sloupci v rámci jedné vrstvy

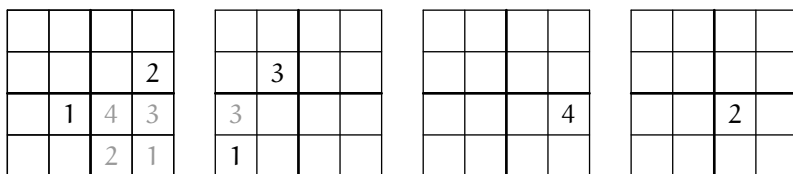


Obr. 3

2. podmínka: čísla se nesmí opakovat ve svislém sloupci „skrz“ krychli
 3. podmínka: když z krychle vybereme libovolný čtverec 4×4 (v kterékoli rovině) a rozdělíme jej na čtyři čtverce 2×2 , tak i tyto malé čtverce musejí obsahovat každou z číslic 1–4 právě jednou

V krocích je uvedena jedna z možných podmínek (nebo kombinace více podmínek), ze kterých jsme dané číslo získali. Je tedy možné, že popsany krok může vycházet i z jiných podmínek.

Nyní můžeme přejít k řešení samotné úlohy: Číslo 3 v 2. vrstvě v 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 3 v 1. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. a 2. podmínky. Číslo 2 v 1. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. a 2. podmínky. Číslo 1 v 1. vrstvě ve čtvrtém čtverci doplníme z 1. podmínky, číslo 4 z 3. podmínky (obr. 4).



Obr. 4

Číslo 2 v 1. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 4 v 2. vrstvě ve 3. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 2 v 2. vrstvě ve 3. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 1 v 2. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 1. podmínky (obr. 5).

Číslo 4 v 1. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 2 v 3. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 2. podmínky. Číslo 4 v 3. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 4 v 3. vrstvě ve 4. čtverci doplníme ze 3. podmínky (obr. 6).

Číslo 1 ve 4. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 2. podmínky. Číslo 1 ve 2. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 2. podmínky. Číslo 2 ve 2. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 1 ve 3. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 2. podmínky (obr. 7).

Číslo 2 ve 3. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 3 ve 4. vrstvě ve

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|--|--|
| | 1 | | |
| | 3 | | |
| 3 | 4 | | |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|--|--|--|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | 4 |
| | | | |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | | |
| | | | |
| | | 2 | |
| | | | |

Obr. 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| | | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|--|--|
| | 1 | | |
| | 3 | | |
| 3 | 4 | | |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|--|--|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | | |
| | | | |
| | | 2 | |
| | | | |

Obr. 6

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| | | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 3 | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|--|---|---|
| | | | |
| | | | |
| 1 | | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|--|--|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | 2 | 1 |
| | | | |

Obr. 7

3. čtverci doplníme z 2. podmínky. Číslo 4 ve 4. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 1 ve 4. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 2. podmínky (obr. 8).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| | | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 3 | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| | 1 | | |

Obr. 8

Číslo 2 ve 4. vrstvě ve 3. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 1 ve 3. vrstvě v 1. čtverci a číslo 2 ve 4. vrstvě v 2. čtverci doplníme z 1. a 2. podmínky. Číslo 1 v 1. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 1. a 3. podmínky (obr. 9).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 1 | | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | 3 | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | | |

Obr. 9

Číslo 4 v 1. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 1. a 3. podmínky. Číslo 2 v 2. vrstvě v 1. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 4 v 2. vrstvě v 1. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 2 v 1. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 1. podmínky a 3. podmínky (obr. 10).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | | 4 |
| 1 | 4 | | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | | |
| 2 | 3 | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | | |

Obr. 10

Číslo 3 v 1. vrstvě v 1. čtverci doplníme ze 3. podmínky. Číslo 3 v 1. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 4 v 1. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 3 v 1. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky (obr. 11).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | | |
| 2 | 3 | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | | |

Obr. 11

Číslo 1 v 1. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 2 v 2. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. a 3. podmínky. Číslo 3 v 2. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 1 v 2. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky (obr. 12).

Číslo 4 ve 2. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. podmínky. Číslo 4 ve 3. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 2. podmínky. Číslo 3 ve 3. vrstvě ve 3. čtverci doplníme z 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | | |

Obr. 12

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | | |

Obr. 13

podmínky. Číslo 3 ve 3. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 1. podmínky (obr. 13).

Číslo 3 ve 2. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. pravidla. Číslo 4 ve 2. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 1. pravidla. Číslo 4 ve 4. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 3 ve 4. vrstvě ve 4. čtverci doplníme z 2. pravidla (obr. 14).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | | |
| | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Obr. 14

Číslo 4 ve 4. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. pravidla. Číslo 4 ve 3. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 2 ve 3. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 3 ve 4. vrstvě v 2. čtverci doplníme z 2. pravidla (obr. 15).

Číslo 1 ve 3. vrstvě v 2. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 2 ve 3. vrstvě v 2. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 4 ve 3. vrstvě v 2. čtverci doplníme z 1. pravidla (obr. 16).

Číslo 3 ve 3. vrstvě ve 2. čtverci doplníme z 1. pravidla. Číslo 3 ve 4. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 1 ve 4. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 2 ve 4. vrstvě v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla. Číslo 4 ve 4. vrstvě

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | | |
| 4 | 1 | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 2 |
| | | | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Obr. 15

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 3 | 2 |
| | | 1 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Obr. 16

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Obr. 17

v 1. čtverci doplníme z 2. pravidla (obr. 17).
Výsledek je na obrázku 18.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Obr. 18

Komentář: Největší problém dělala 3. podmínka. Hodně lidí ztratilo body na tom, že neověřili 3. podmínku, tvrdili, že má sudoku více řešení, nebo jejich řešení nesplňovalo právě jenom 3. podmínku. Problém 3. podmínky nebyl v hori-

zontálním řezu krychlí, ale ve vertikálních řezech, které řešitelé nebrali v úvahu. Z řešení se mi moc líbilo zpracování Roberta Gemrota a Václava Trpišovského.

Úloha č. 3

Byl jsem domluven s dalšími třemi tenisty, že posečeme trávu kolem kurtů. Protože jsem ale byl narychlo odvolán k jednomu pacientovi, slíbil jsem jim, že když práci zvládnou beze mě, zaplatím každému z nich 5 liber za každou hodinu, o kterou kvůli mně budou muset pracovat déle. Když jsem nedávno jednoho z nich potkal, postěžoval si mi, že tam tehdy všichni tři sekali od osmi hodin ráno do čtyř hodin odpoledne bez jakékoli přestávky. Kolik bych měl každému z nich zaplatit, aby to bylo spravedlivé?

Řešení: Rozdělíme si na dva podproblémy:

Problém 1: 3 lidé sekali dohromady 8 hodin. Jak dlouho by sekali 4 lidé? Tři lidé sekali 8 h, čtyři lidé sekali x h.

Úvaha: Když 3 lidé z 8 h posekají 1 trávník, tak za 1 hodinu posekají spolu $\frac{1}{8}$ trávníku. V tom případě 1 člověk poseká za 1 h jednu třetinu toho, co všichni 3 dohromady, čili $3 \cdot \frac{1}{8 \cdot 3} = \frac{1}{24}$ trávníku. Pokud by sekali 4 lidé, tak by každý posekal za 1 h $\frac{1}{24}$ trávníku, čili všichni dohromady $4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ trávníku. Celý 1 trávník tedy posekají za 6 hodin. Teď použijeme trojčlenku – přes nepřímou úměrnost (čím víc lidí pracuje, tím kratší dobu jim to bude trvat):

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x},$$
$$x = 6 \text{ h.}$$

Problém 2: Kolik jim doktor zaplatil? Každému slíbil 5 liber za každou hodinu, co by pracovali navíc. Měli pracovat 6 h, pracovali 8 h. Každý pracoval o 2 hodiny víc, takže každému zaplatil 10 liber.

Komentář: Nejhezčí řešení byla ta, která byla řešená trojčlenkou a byla dobře a hezky okomentovaná. Naopak jsem strhávala bod za to, že někdo někde nezdůvodnil důležitý krok nebo se s komentářem neobtěžoval vůbec, protože i to je důležitá část řešení.

Úloha č. 4

Telefonní číslo tenisového klubu je trojmístné, jeho ciferný součet je 11 a přitom je zároveň i dělitelné 11. Jaká všechna čísla splňují tyto vlastnosti?

Řešení: Vycházíme ze skutečnosti, že naše trojmístné číslo je dělitelné 11. Pokud označíme a , b , c po řadě cifru na místě stovek, desítek a jednotek, pak musí platit $a + b + c = 11$. Teď ještě vyřešíme dělitelnost 11.

Z kritéria dělitelnosti jedenácti platí, že číslo je dělitelné 11, pokud rozdíl součtu číslic na sudém a lichém místě je dělitelný 11. Pokusíme se získat z předešlého vztahu tento rozdíl, a tak od rovnice odečteme $2b$. Vyjde nám $a + c - b = 11 - 2b$, kde levá strana je dělitelná 11 podle dělitelnosti, takže i pravá strana je dělitelná 11, tedy $2b = 0$ nebo $2b = 11$. Z toho vychází, že $b = 0$ nebo $b = 5,5$, což není cifra. Řešením tedy budou taková čísla tvaru $100a + c$, kde $a + c = 11$.

Řešením tedy budou čísla 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.

Komentář: Většina z vás úlohu vyřešila správně. Nejčastější chybou bylo, že jste zapomněli odůvodnit, proč to nemohou být jiná čísla, než vámi uvedená.

Úloha č. 5

„To víte, je to teď všechno zamotané. Radní se rozhodli některé silnice tady v okrese rekonstruovat, samozřejmě tak, aby se poté dalo mezi každými dvěma obcemi přejet jen po opravených cestách. Navíc si ale ti, kteří mají svá letní sídla v Alwoodley, Bramhamu a Cleckheatonu prosadili, že do těchto měst povede jen jedna opravená silnice, aby nebyli obtěžováni povozy a automobily, které by tudy jen projížděly. A samozřejmě to všechno chtějí udělat co nejlevněji. Nevím, které silnice se nakonec mají rekonstruovat, ale mám tu plánek s cenami všech (obr. 19). Dokázal byste z něj určit, které se budou opravovat a kolik to dohromady bude stát?“

Řešení: Tri sídelné mestá (Alwoodley, Bramham a Cleckheaton) budú ku cestnej sieti pripojené iba jedinou cestou. Preto nám nepomôžu s prepájaním ostatných miest. Pre začiatok na ne zabudneme.

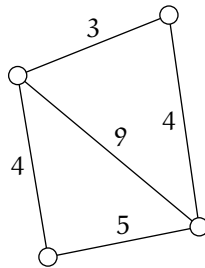
Musíme teraz (čo najlacnejšie) prepojiť tieto mestá tak, aby sa z každého dalo dostať do každého. Je jasné, že použijeme cestu dole (s cenou 9). Ďalej sa zameriame na ľavý dolný roh:

Aby sme prepojili každé s každým, musíme postaviť aspoň 3 cesty. Postavíme preto tie 3 najlacnejšie (4, 4, 3).

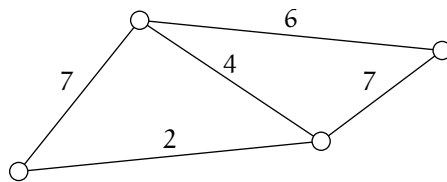
Ďalej sa zameriame na ľavý horný roh:

Tuto podobne vyberieme 3 najlacnejšie cesty (2, 4, 6).

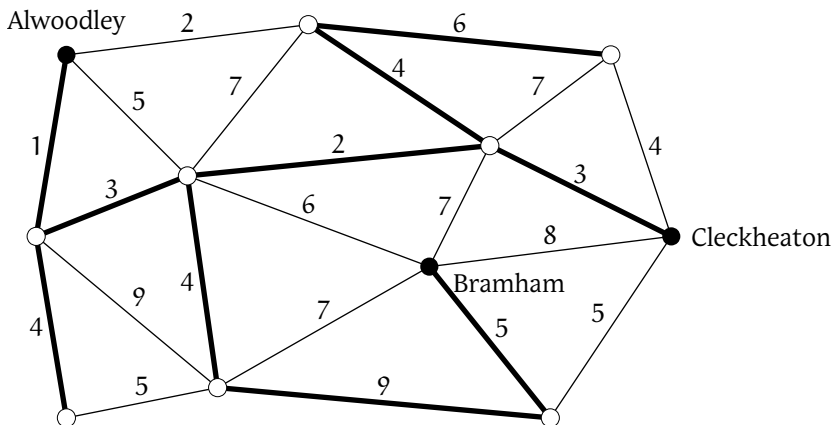
Teraz zase pridáme do mapy sídelné mestá. Každé z nich pripojíme jednou cestou (tou najlacnejšou).



Obr. 21



Obr. 22



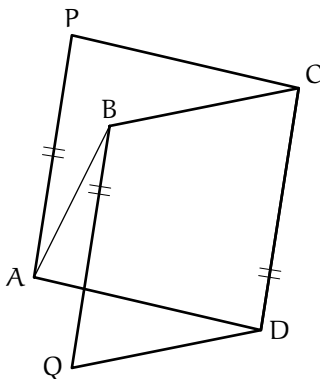
Obr. 23

som a toto mi vyšlo“ nie je postačujúci. Päť bodov dostali tí z vás, ktorí mali správne riešenie, ukázali postup a k tomu ešte napísali nejaký argument preto je toto to najlacnejšie riešenie.

Úloha č. 6

Jak jsem ale brzy zjistil, mapku jsem si příliš dobře nezapamatoval. Jediné, co jsem měl nakreslené, byly body A, B, C a D spojené do čtyřúhelníku. K nim jsem potom přidal body P a Q a všiml jsem si, že v mém náčrtku byly čtyřúhelníky APCD i BCDQ rovnoběžníky. Jaký je poměr délek úseček AP a BQ?

Řešení: V rovnoběžníku platí, že protilehlé strany jsou stejně dlouhé (obr. 24). Proto $|BQ| = |CD|$ a $|CD| = |PA|$, a tedy $|AP| = |BQ|$. Tudíž poměr úseček $|AP| : |BQ| = 1 : 1$.



Obr. 24

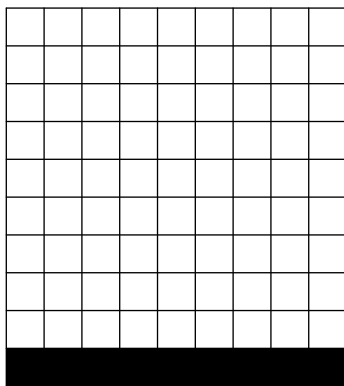
Komentář: Přišlo mnoho správných odpovědí. Někteří lidé úlohu řešili narýsováním a změřením stran. Tento způsob neřeší úlohu obecně, ale pouze pro případ, který narýsujete. Také měření není 100 % přesné, proto jakékoli měření není plnohodnotný důkaz.

Úloha č. 7

Paní Whitakerová měla 9 lahviček, ve kterých bylo dohromady 32 tablet aspirinu. Žádná z lahviček nebyla původně prázdná. Podle rady své kamarádky se měla snažit aspirin spotřebovat co nejrychleji, a to tak, že každý den si mohla vzít buď všechny tabletky z jedné lahvičky, nebo jednu tabletku z každé neprázdné lahvičky. Jaký nejmenší možný počet dní paní Whitakerová potřebuje, aby spotřebovala všechny tabletky, ať už byly na začátku rozmístěny v lahvičkách jakkoliv?

Řešení: Úlohu můžeme řešit ku příkladu tak, že najdeme nejhorší rozestavení (tj. takové, které paní W. spotřebuje za nejdélší čas) a ukážeme, že to opravdu to nejhorší rozestavení je.

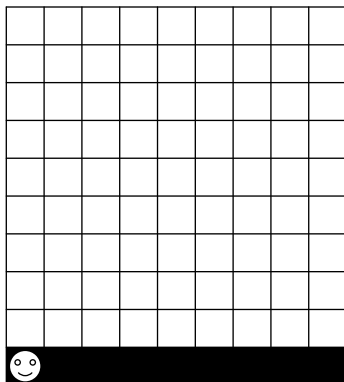
Pro přehlednost si nakreslíme lahvičky do čtvercové sítě a pilulky v lahvičkách budeme zobrazovat vybarvením políček – začínáme s tím, že v každé už jedna pilulka je (jak bylo řečeno v zadání) – viz obrázek 25.



Obr. 25

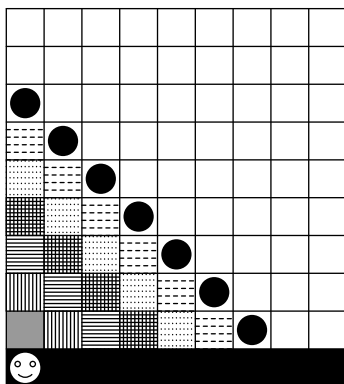
Abychom mohli najít nejhorší rozestavení, musíme se nejdříve zamyslet, vůči čemu má být nejhorší. V našem případě je to vůči počtu dní (tj. počtu použití operací, které má paní W. k dispozici, což je buď odebrání jedné pilulky z každé lahvičky, nebo odebrání všech pilulek z jedné). Když se ale koukneme zpátky na náš obrázek, vidíme, že odebrat jednu pilulku z každé lahvičky je stejné jako odebrat jeden řádek (resp. posunout se o řádek výše) a že odebrat všechny pilulky z jedné lahvičky je stejné jako odebrat jeden sloupec (resp. posunout se o sloupec doleva). A teď, postavíme-li si pro názornost na políčko (1, 1) panáčka (obrázek 26), tak je najednou naše úloha stejná jako úloha „Na kolik nejméně kroků se může dostat panáček z políčka (1, 1) na libovolné nevybarvené políčko?“

Z obrázku je jasně vidět, že zatím by to panáčkovi trvalo jenom jeden krok (posun o jedno políčko nahoru). Ale jako už od začátku jsme tu my, abychom to panáčkovi co nejvíce ztížili. To je jednoduché – stačí mu to políčko, na které se dostane jedním krokem, vybarvit (šedé políčko). Teď už mu to trvá dva kroky, ale opět stačí pouze vybarvit políčka, na která by se dostal dvěma kroky (svislé šrafování) a cesta se mu zase prodlouží. Tak můžeme pokračovat dál a dál, až



Obr. 26

na sedm kroků. Jak vidíme, po rozšíření na sedm kroků nám sice ještě zbývají 2 pilulky/políčka, ale možností, jak dojít na prázdné políčko (na obrázku 27 označené puntíky), má panáček 7, takže ať už je umístíme kamkoliv, vždy mu určitě ještě 5 možností, jak dojít na prázdné políčko za sedm kroků, zbyde.



Obr. 27

A protože, jak jsme už ukázali, je úloha s panáčkem stejná jako naše původní úloha s lahvičkami (počet kroků odpovídá počtu dní), tak správná odpověď na otázku „Kolik nejméně dní potřebuje paní W., aby spotřebovala všechny pilulky, pokud jsou v lahvičkách zcela náhodně?“ je 7 dní.

Ukáží tu ještě jedno správné řešení, které i když není tak hezké, jako to, které jste právě četli, tak je to poměrně užitečná metoda, kterou lze použít v mnoha situacích. Jak totiž spousta z vás zjistila, najít správný výsledek (resp. to nejhorší rozmístění, které je, jak už jsme si ukázali, třeba 7 6 5 4 3 2 1 2 2) nebylo to nejtěžší. Těžší bylo zdůvodnit, proč je to právě to nejhorší rozmístění. A v takové situaci (když si myslíte, že jste našli to pravé řešení) bývá nejlepší předpokládat, že to ještě to nejlepší řešení není, ale že existuje řešení ještě lepší a pak prostě ukázat, že takové řešení vede k nějakému sporu (nepravdivé situaci). V našem případě to znamená:

1. Myslím si, že správná odpověď je 7 a našel jsem k tomu i rozmístění – třeba 7 6 5 4 3 2 1 1 3.
2. Ukážu, že správná odpověď k mému rozmístění je opravdu 7 jak tvrdím. To je vidět poměrně snadno – abych se zbavil sloupečku se sedmičkou, potřebuju sedmkrát odebrat jednu pilulku z každého sloupečku a použití druhé metody mi tu nijak nepomůže, protože tak odebírám vždy méně pilulek – v první kroku max. 7 místo devíti, ve druhém max. 6 místo sedmi, ve třetím max. 5 místo šesti, atd.
3. Řeknu si „No dobře, tak ať tedy existuje takové rozmístění, které jde zvládnout nejrychleji za 8 kroků.“. To ale znamená, že musí být v některé z lahvíček nejméně 8 pilulek, protože kdyby v každé bylo sedm a méně, tak mi stačí prostě sedmkrát odebrat jednu pilulku z každé lahvičky. Úplně stejně pak ale musí v další lahvičce být alespoň 7 pilulek (protože kdyby jich bylo šest a méně, tak můžu šestkrát odebrat jednu z každé plus jednou, když si vezmu celý sloupeček s osmi a jsme znova jenom na sedmi krocích). Stejným způsobem se dostanu k tom, že potřebuju mít v lahvičkách posloupnost pilulek 8 7 6 5 4 3 2 1, což už je ale víc pilulek než mám.

Ukázal jsem tedy, že existuje takové rozestavení, které jde spotřebovat nejrychleji za sedm dní, a že aby existovalo takové, které stihnu nejrychleji za osm, potřebuju určitě víc pilulek než skutečně mám. Tím je dokázáno, že pro jakékoliv rozmístění to jde nejrychleji za 7 dní.

Komentář: Mnoho z vás se nechalo zmást už formulací zadání. Kamenem úrazu zde byla věta „Jaký nejmenší možný počet dní potřebuje paní W., aby spotřebovala všechny tabletky, ať už byly na začátku rozmístěny v lahvičkách jakkoliv?“ a hlavně její poslední slovo „jakkoliv“. A tak se stalo, že ve spoustě řešení bylo nalezené ono „jakékoliv řešení, pro které lze spotřebovat pilulky nejrychleji“, tj. rozmístění 2 4 1 1 1 1 1 1 1 1. Kdykoliv však potkáte v matematické úloze takovou formulaci (a bývá v nich často), znamená to, že je vaším úkolem najít nejmenší

počet dní, za který se dá zkonsumovat libovolné/všechna/to nejhorší rozmístění (všechna tato slova zde popisují stejnou úlohu). Zkrátka, že vezmeme-li jakékoliv rozmístění, vždy půjde spotřebovat maximálně za tolik dní, kolik říkáte, ale ani o den méně.

Pro ty, kteří jsou již ve čtení matematických zadání zbláhli, nebyl většinou problém najít správný výsledek. Co problém byl (a není tomu vůbec divu, protože to byla úloha opravdu těžká), bylo ukázat, že nalezený výsledek je správný. Řešitelů, kteří zvládli i to, bylo opravdu málo (o to víc gratuluji, jste fakt dobří).

Více k častým chybám najdete i ve vzorovém řešení. Jenom ještě jedna věc, často jste psali, že to paní W. určitě nebude trvat déle než devět dní (protože si každý den může vzít celou lahvičku), což sice v řešeních typicky nehrálo žádnou důležitou roli, ale je to užitečné první pozorování, a tak jsem to hodnotil kladně, obzvlášť když se vám dál v řešení už tolik nevedlo.

Takže řešte i dál a pořádně pište postupy, ať víme, co jste jak mysleli a nemusíme to hádat, tipovat nebo věštit z křišťálové koule. (A taky ať vám můžeme dávat hodně bodů, protože dávat vám body za to, co si my domyslíme do vašich řešení, je zkrátka trapné, a proto to ani neděláme).

Přeji spousty dobrých nápadů do další série.

Úlohy první série opravovali a komentáře sepsali: 1. Martin Černý, 2. Zuzana Procházková, Marián Poppr, 3. Kateřina Macková, Jiří Erhart, 4. Karel Vlachovský, 5. Martin Smolík, 6. Jiří Štrincl, 7. Jan Erhart.

Výsledková listina Pikomatu MFF UK po 1. sérii

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>P</i> | σ | Σ |
|----------------|---------------|-------------------------|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1.-15. | 1. | Marek Pišťák | 1. GJHP | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | 1. | Matyáš Hebert | 7. ZSKD | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | - | 30 | 30 |
| | 1.-3. | Petr Hladík | 8. GMNP | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Tomáš Flidr | 8. GKRO | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 30 | 30 |
| | | Michal Beránek | 8. GVOP | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | 1.-10. | Hana Slámová | 9. GKJB | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 30 | 30 |
| | | Lenka Ježková | 9. PJZS | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Ludmila Hana Houfková | 9. GMHS | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Jakub Kislinger | 9. GJVK | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Lukáš Frk | 9. GNAP | 5 | - | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Klára Pernicová | 9. GZAS | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 30 | 30 |
| | | Milan Malačka | 9. GNAP | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | - | 30 | 30 |
| | | Petr Khartskhav | 9. PORG | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 30 | 30 |
| | | Lubor Čech | 9. GMIK | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| | | Magdaléna Mišinová | 9. GJKP | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 30 | 30 |
| 16.-26. | 2. | Anna Hronová | 7. GKJB | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 1 | - | 29 | 29 |
| | 4.-7. | David Hájek | 8. ZSJW | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Klára Hubínková | 8. GMNP | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Kryštof Pravda | 8. GMSP | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Radomír Mielec | 8. GVOL | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | 11.-16. | Klára Churá | 9. GCHB | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | - | 29 | 29 |
| | | Václav Janáček | 9. GKJB | 5 | 5 | 5 | 5 | - | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Mikuláš Brož | 9. GNSP | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Václav Trpišovský | 9. OPEN | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | - | - | 29 | 29 |
| | | Robert Gemrot | 9. GHAV | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| | | Alena Šindelářová | 9. GZNS | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 | - | 29 | 29 |
| 27.-32. | 8.-9. | Anna Procházková | 8. ZSRA | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 1 | - | 28 | 28 |
| | | Martin Mlejnecký | 8. GSPI | - | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 28 | 28 |
| | 17.-20. | Adéla Karolína Žáčková | 9. GCDP | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 5 | 3 | - | 28 | 28 |
| | | Vladimír Chudý | 9. ZSRD | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 5 | 3 | - | 28 | 28 |
| | | Jan Schmidtmayer | 9. GCAK | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 5 | 3 | - | 28 | 28 |
| | | Dominik Belza | 9. GBIB | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | - | 28 | 28 |
| 33.-41. | 3. | Martina Lauerová | 7. GNAP | 5 | 4 | 5 | 2 | 5 | 5 | 3 | - | 27 | 27 |
| | 10.-16. | Filip Zikeš | 8. GPBZ | 1 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 3 | - | 27 | 27 |
| | | Vladka Raclavská | 8. SLGO | 4 | 5 | 5 | 5 | - | 5 | 3 | - | 27 | 27 |
| | | Karolína Jelínková | 8. AGKP | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 5 | - | - | 27 | 27 |
| | | Kryštof Veverka | 8. JGNA | 5 | 5 | 5 | 3 | - | 5 | 4 | - | 27 | 27 |

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | P | σ | Σ | |
|------------------|------------------|-------------------------|---------------------|---------|---|---|---|---|---|----|----|----------|----------|----|
| 33.–41. | 10.–16. | Alena Zemánková | 8. ZVAH | 5 | 5 | 5 | 5 | 1 | 5 | 2 | - | 27 | 27 | |
| | | Martin Černý | 8. ZSNL | 5 | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 3 | - | 27 | 27 | |
| | | Hana Bečvářová | 8. GMNP | 5 | 5 | 4 | 4 | 0 | 5 | 4 | - | 27 | 27 | |
| 42.–51. | 21. | Jan Heřta | 9. GSOV | 5 | 3 | 5 | 5 | 1 | 5 | 4 | - | 27 | 27 | |
| | | Kateřina Holečková | 7. GFMP | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 4 | 1 | - | 26 | 26 | |
| | 4.–5. | Jan Tesařík | 7. GBEN | 5 | 3 | 5 | 5 | 3 | 5 | 2 | - | 26 | 26 | |
| | | 17.–19. | Martin Fried | 8. GJGJ | 5 | 4 | 5 | 4 | 3 | 5 | 1 | - | 26 | 26 |
| | | Sára Byšková | 8. ZSJZ | 5 | 4 | 5 | 5 | 1 | 5 | 2 | - | 26 | 26 | |
| | 22.–26. | Robin Palán | 8. GJGJ | 3 | 5 | 5 | 5 | 1 | 5 | 3 | - | 26 | 26 | |
| 52.–61. | 22.–26. | David Kamenský | 9. GBRV | 3 | 4 | 5 | 5 | 1 | 5 | 4 | - | 26 | 26 | |
| | | Erik Sedlak | 9. GASK | 5 | 3 | 5 | 5 | 1 | 5 | 3 | - | 26 | 26 | |
| | | Julie Rubášová | 9. BGBN | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 3 | - | 26 | 26 | |
| | 6. | Kateřina Matulová | 9. BGBN | 5 | 3 | 5 | 5 | 3 | 5 | 1 | - | 26 | 26 | |
| | | Veronika Krčmáriková | 9. GMAS | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | - | 2 | - | 26 | 26 | |
| | | 20.–24. | Aneta Jenšíková | 7. GMNP | 5 | - | 5 | 5 | 5 | 5 | - | - | 25 | 25 |
| | | Jan Poláček | 8. GBRV | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 | 4 | 1 | - | 25 | 25 | |
| | | Šimon Glück | 8. GPIS | 1 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 2 | - | 25 | 25 | |
| | | Vladimír Vávra | 8. ZSJE | - | 5 | 5 | 5 | 3 | 4 | 3 | - | 25 | 25 | |
| | | Kristián Šťastný | 8. GOST | 0 | 4 | 5 | 5 | 2 | 5 | 4 | - | 25 | 25 | |
| 27.–30. | Filip Vopálenský | 8. MLGP | 2 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | - | - | 25 | 25 | | |
| Tereza Janíková | 9. | 4 | 5 | 5 | 4 | - | 5 | 2 | - | 25 | 25 | | | |
| 62.–65. | 1. | Adam Kovalčík | 9. ZSTV | - | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 1 | - | 25 | 25 | |
| | | Klára Zemanová | 9. PORG | 5 | 4 | 5 | 5 | - | 5 | 1 | - | 25 | 25 | |
| | | Anna Jurtíková | 9. GINT | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | - | 25 | 25 | |
| | 25.–26. | Eliška Gemperlová | 6. GNKP | 5 | - | 5 | 5 | 5 | - | 4 | - | 24 | 24 | |
| | Josef Knápek | 8. GVOL | 3 | 3 | 5 | 5 | 3 | 5 | 2 | - | 24 | 24 | | |
| | Vojtěch Vařecha | 8. GTIS | - | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | - | - | 24 | 24 | | |
| | 66.–74. | 31. | Hana Houzarová | 9. ZSMS | - | 4 | 5 | 5 | 2 | 5 | 3 | - | 24 | 24 |
| | | | Vanda Hutářová | 7. GTMP | - | 5 | 5 | 5 | - | 5 | 3 | - | 23 | 23 |
| | | 27.–29. | Jlndřiška Palatová | 8. ZSPJ | - | 5 | 4 | 3 | 5 | 1 | - | 23 | 23 | |
| | | | Natálie Prušáková | 8. ZSDS | 5 | 3 | 5 | 5 | 2 | 3 | 2 | - | 23 | 23 |
| 32.–36. | | Tomáš Čurda | 8. GCDP | - | 5 | 5 | 5 | 3 | 4 | 1 | - | 23 | 23 | |
| Tereza Vitoušová | | 9. GCSP | 1 | 3 | 5 | 2 | 5 | 5 | 3 | - | 23 | 23 | | |
| 75.–83. | 37.–40. | Karolína Letochová | 9. GSTE | 2 | 4 | 5 | 5 | 1 | 5 | 2 | - | 23 | 23 | |
| | | Jan Hřebík | 9. OPEN | 3 | 4 | 5 | 5 | - | 4 | 2 | - | 23 | 23 | |
| | | Kateřina Brádllová | 9. GPDA | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 5 | 1 | - | 23 | 23 | |
| | Ondřej Chlubna | 9. GOAO | 2 | 4 | 5 | 5 | 0 | 4 | 3 | - | 23 | 23 | | |
| | 2. | Eliáš Hager | 6. ZSKL | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 | - | 1 | - | 22 | 22 | |
| | 8.–11. | Lukáš Trecha | 7. GZNS | - | 4 | 5 | 5 | 2 | 5 | 1 | - | 22 | 22 | |
| | | Monika Krátká | 7. ZSOR | 1 | 5 | 5 | 5 | 2 | 4 | 1 | - | 22 | 22 | |
| | | Tereza Kahounová | 7. CGMN | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 4 | 3 | - | 22 | 22 | |
| | | Nikola Kášková | 7. GTVL | 2 | 4 | 5 | 4 | 0 | 5 | 2 | - | 22 | 22 | |
| | | 37.–40. | Aleš Socha | 9. ZSJC | 5 | 2 | 5 | 5 | 0 | 2 | 3 | - | 22 | 22 |
| David Ferenz | 9. ZSRV | 2 | 4 | 5 | 4 | 1 | 4 | 3 | - | 22 | 22 | | | |

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | P | σ | Σ |
|----------------|---------------|-------------------------|---------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|----------|
| 75.–83. | 37.–40. | Michal Valentík | 9. CZSV | 1 | 3 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | - | 22 | 22 |
| | | Anička Hollmannová | 9. GDAR | 2 | 3 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 | - | 22 | 22 |
| 84.–94. | 2. | Adéla Hodboďová | 1. ZSZE | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 4 | 2 | - | 21 | 21 |
| | 12. | Vojtěch Štěpán | 7. GBEN | 0 | 3 | 5 | 5 | 0 | 5 | 3 | - | 21 | 21 |
| | 30.–35. | Lenka Jenčíková | 8. GCAK | 5 | 3 | 5 | 3 | 1 | 3 | 2 | - | 21 | 21 |
| | | Eliška Márová | 8. ZSRA | - | 4 | 5 | 5 | 0 | 4 | 3 | - | 21 | 21 |
| | | Jakub Mezera | 8. ZSTR | 5 | 3 | 5 | 5 | 1 | - | 2 | - | 21 | 21 |
| | | Miroslav Novotný | 8. ZSTM | 2 | 5 | 5 | 4 | 0 | 4 | 1 | - | 21 | 21 |
| | | Mariia Graboviuk | 8. ZPAL | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 5 | 1 | - | 21 | 21 |
| | | Kateřina Tereza Skoupá | 8. GBLA | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 5 | 1 | - | 21 | 21 |
| | 41.–43. | Magdalena Petrlová | 9. GKJB | 2 | 3 | 5 | 5 | 0 | 4 | 2 | - | 21 | 21 |
| | | Jan Vavřín | 9. PORG | 1 | - | 5 | 5 | - | 5 | 5 | - | 21 | 21 |
| | | Dominik Farhan | 9. GMNP | 2 | 5 | 5 | 2 | 2 | 5 | - | - | 21 | 21 |
| 95.–100. | 3. | Antonín Šámal | 6. GFXS | 5 | 5 | 5 | 5 | - | - | - | - | 20 | 20 |
| | 13. | Jolana Štraitová | 7. GBUD | 1 | 3 | 5 | 4 | 1 | 5 | 2 | - | 20 | 20 |
| | 36.–37. | Lucie Chromečková | 8. ZSMK | - | 5 | 5 | 4 | 0 | 4 | 2 | - | 20 | 20 |
| | | Markéta A. Doležalová | 8. BGUK | - | 5 | 5 | 5 | 2 | - | 3 | - | 20 | 20 |
| | 44.–45. | Kateřina Hönigerová | 9. GLNS | 0 | 4 | 5 | 4 | 0 | 5 | 2 | - | 20 | 20 |
| | | Gabriela Marxová | 9. GDAR | 2 | - | 5 | 4 | 2 | 5 | 2 | - | 20 | 20 |
| 101.–109. | 3. | Filip Hodboď | 1. ZSZE | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 | 2 | 2 | - | 19 | 19 |
| | 4. | Martin Cornejo | 6. ZBNS | 5 | 2 | 5 | 3 | 0 | 3 | 1 | - | 19 | 19 |
| | 14. | Antonie Erika Grant | 7. AGKP | 1 | - | 5 | 5 | - | 4 | 4 | - | 19 | 19 |
| | 38.–42. | František Bujnovský | 8. CSLH | - | - | 5 | 4 | 3 | 5 | 2 | - | 19 | 19 |
| | | Hana Pasková | 8. GWOP | - | 2 | 5 | 4 | 2 | 5 | 1 | - | 19 | 19 |
| | | Ondřej Janeček | 8. PORG | 5 | 3 | 5 | 5 | - | - | 1 | - | 19 | 19 |
| | | Jan Šuráň | 8. GSPI | - | - | 5 | 5 | - | 5 | 4 | - | 19 | 19 |
| | | Šimon Skoumal | 8. PORG | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 2 | 2 | - | 19 | 19 |
| | 46. | Jan Vondráček | 9. GNAP | 1 | 1 | 5 | 5 | 0 | 4 | 3 | - | 19 | 19 |
| 110.–115. | 4.–5. | Aneta Bobisudová | 1. ZSHC | 0 | 3 | 4 | 3 | 2 | 5 | 1 | - | 18 | 18 |
| | | Patrik Richvalský | 1. ZSOK | 2 | - | 5 | 5 | 3 | 1 | 2 | - | 18 | 18 |
| | 15. | Marek Matuš | 7. GSTR | 2 | 3 | 5 | 5 | 0 | - | 3 | - | 18 | 18 |
| | 43.–44. | Eliška Šebková | 8. GDKL | - | 2 | 5 | 5 | 2 | 3 | 1 | - | 18 | 18 |
| | | Marek Čermák | 8. ZSNH | 0 | 5 | 4 | 2 | 0 | 5 | 2 | - | 18 | 18 |
| | 47. | Eliška Dorušková | 9. GRPR | 5 | 0 | 5 | 5 | - | 1 | 2 | - | 18 | 18 |
| 116.–124. | 5. | Tereza Bencková | 6. GEKP | - | 3 | 5 | 3 | 0 | 4 | 2 | - | 17 | 17 |
| | 16.–17. | Jana Horňáčková | 7. ZSBC | - | 3 | 5 | 5 | 3 | 1 | - | - | 17 | 17 |
| | | Jiří Bojčuk | 7. GBIB | - | 4 | 5 | 5 | 2 | - | 1 | - | 17 | 17 |
| | 45.–46. | Antonín Rousek | 8. GPDA | - | - | 5 | 5 | 1 | 4 | 2 | - | 17 | 17 |
| | | A. Rosenbergová | 8. ZSTH | 1 | 3 | 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | - | 17 | 17 |
| | 48.–51. | Vojtěch Bořík | 9. CGMN | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 5 | - | - | 17 | 17 |
| | | Jana Čákorová | 9. SGTP | - | 5 | 5 | 5 | 2 | - | - | - | 17 | 17 |
| | | Lada Vestfálová | 9. GJER | - | 4 | 5 | 5 | - | - | 3 | - | 17 | 17 |
| | | Vojtěch Dašek | 9. PORG | - | 5 | 5 | 5 | - | - | 2 | - | 17 | 17 |
| 125.–130. | 1. | Patrik Rosenberg | 5. ZSTH | - | 4 | 5 | 5 | 0 | - | 2 | - | 16 | 16 |

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | P | σ | Σ |
|----------------|---------------|-------------------------|---------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|----------|
| 125.–130. | 47.–49. | Daniela Cieslarová | 8. MZSN | - | 3 | 5 | 5 | 0 | - | 3 | - | 16 | 16 |
| | | Filip Absolon | 8. ZSKM | 1 | 4 | 5 | 4 | 0 | 2 | - | - | 16 | 16 |
| | | Tomáš Foral | 8. ZSBL | - | - | 5 | 5 | 0 | 4 | 2 | - | 16 | 16 |
| | 52.–53. | Doubravka Horáková | 9. ZSSZ | 5 | - | 5 | 4 | 0 | - | 2 | - | 16 | 16 |
| | | Filip Gabriel | 9. GCST | 5 | - | 5 | 4 | 0 | - | 2 | - | 16 | 16 |
| | | Karolína Biolková | 6. ZSEK | - | 5 | 5 | - | - | - | - | - | 15 | 15 |
| 131.–137. | 6.–7. | Šimon Genčur | 6. BGBN | - | 5 | 5 | 5 | - | - | - | - | 15 | 15 |
| | | Kristýna Malcová | 7. ZSMB | 0 | 2 | 5 | 5 | 1 | - | 2 | - | 15 | 15 |
| | | Kateřina Spáčilová | 7. ZSSM | 1 | 3 | 5 | 5 | - | - | 1 | - | 15 | 15 |
| | 50.–51. | Jan Kotrlík | 8. GMNP | - | 4 | 5 | 5 | 0 | - | 1 | - | 15 | 15 |
| | | Jan Vladimír Podlipný | 8. ZSFK | - | 4 | 5 | 5 | - | - | 1 | - | 15 | 15 |
| | | Aleš Horák | 9. ZSVO | - | 3 | 5 | 5 | - | - | 2 | - | 15 | 15 |
| 138.–145. | 8. | Kristýna Dominiková | 6. BGBN | - | 4 | 5 | 4 | 0 | - | 1 | - | 14 | 14 |
| | | Vojtěch Peterka | 7. ZSRA | - | - | 5 | 5 | 2 | - | 2 | - | 14 | 14 |
| | | Marie Kukačková | 7. GSOV | - | 2 | 5 | 4 | - | - | 3 | - | 14 | 14 |
| | 55.–59. | Dominik Hrdý | 9. ZSHC | - | 3 | 5 | 5 | - | - | 1 | - | 14 | 14 |
| | | Michael Zábojník | 9. ZSBJ | - | 4 | 5 | 5 | 0 | - | - | - | 14 | 14 |
| | | František Hovorka | 9. GBIB | 5 | - | 5 | 2 | - | 2 | - | - | 14 | 14 |
| | | Tomáš A. Kovanda | 9. AGKP | - | - | 5 | 5 | 4 | - | - | - | 14 | 14 |
| | | Julie Fialová | 9. ZSMD | - | - | 5 | 3 | - | 5 | 1 | - | 14 | 14 |
| | | Michaela Štouralová | 6. GSOV | - | - | 5 | 5 | 3 | - | - | - | 13 | 13 |
| 146.–154. | 9.–10. | Matěj Jaroš | 6. GJGJ | - | 3 | 5 | 5 | 0 | - | - | - | 13 | 13 |
| | | Jan Chlumecky | 7. GBRV | - | 2 | 5 | 4 | 1 | - | 1 | - | 13 | 13 |
| | | Patrik Jendele | 7. ZSNZ | - | 5 | - | 5 | 1 | 1 | 1 | - | 13 | 13 |
| | 52.–55. | Markéta Voráčková | 8. ZSJK | - | 5 | 5 | - | - | 3 | - | - | 13 | 13 |
| | | Roman Malenda | 8. ZSOK | 2 | 1 | 4 | 4 | 0 | 0 | 2 | - | 13 | 13 |
| | | Thien Trang Pham Thi | 8. GCHB | - | - | - | 4 | 4 | 5 | - | - | 13 | 13 |
| | | Vítek Slanina | 8. GCHB | - | 5 | 5 | 3 | - | - | - | - | 13 | 13 |
| | | Daniela Filipová | 9. ZSVJ | - | 5 | 0 | 3 | 0 | 4 | 1 | - | 13 | 13 |
| | | Kryštof Rakovský | 8. ZSJS | - | - | 5 | 5 | 1 | - | 1 | - | 12 | 12 |
| 155.–157. | 56.–57. | Andrea Pospíšilová | 8. GSTR | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | - | 12 | 12 |
| | | Jan Heřmánek | 9. GKKO | 2 | 2 | 5 | - | 1 | - | 2 | - | 12 | 12 |
| | | Klára Billová | 7. GSOV | - | - | 4 | 5 | - | - | 2 | - | 11 | 11 |
| 158.–163. | 24.–27. | Jan Lelek | 7. ZSFC | - | 3 | 5 | - | - | - | 3 | - | 11 | 11 |
| | | Markéta Najmanová | 7. ZSFP | - | 2 | 5 | 4 | 0 | - | - | - | 11 | 11 |
| | | Petr Hladký | 7. GSRY | - | 4 | 5 | - | - | - | 2 | - | 11 | 11 |
| | 58. | Vojtěch Stránský | 8. ZOBA | 5 | 5 | 1 | - | - | - | - | - | 11 | 11 |
| | | Markéta Bučková | 9. ZSKD | 2 | - | 5 | 2 | - | - | 2 | - | 11 | 11 |
| | | Eliška Tomášťíková | 1. ZBUH | - | 2 | 1 | 5 | - | - | 2 | - | 10 | 10 |
| 164.–167. | 6. | Filip Adam Chyška | 6. AGKP | - | 3 | 1 | 5 | - | - | 1 | - | 10 | 10 |
| | | Vít Křivonoska | 7. GVOP | 5 | - | 5 | - | - | - | - | - | 10 | 10 |
| | | Markéta Smejkalová | 8. MZSV | - | 4 | 1 | 4 | - | - | 1 | - | 10 | 10 |
| 168.–172. | 29.–30. | Rostislav Mates | 7. ZSRA | 0 | - | 5 | 4 | 0 | - | - | - | 9 | 9 |
| | | Vít Holoubek | 7. ZSTK | - | 2 | 5 | 1 | 0 | - | 1 | - | 9 | 9 |

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | P | σ | Σ |
|----------------|---------------|-------------------------|---------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|----------|
| 168.–172. | 60. | Michaela Billová | 8. ZSCN | - | - | 5 | 2 | - | - | 2 | - | 9 | 9 |
| | 63.–64. | Martin Pacák | 9. ZSCD | - | - | 4 | 5 | - | - | - | - | 9 | 9 |
| | | Stanislav Ježek | 9. GCBR | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | - | - | - | 9 | 9 |
| 173.–178. | 1. | Marie Steinhäuserová | 3. ZKNE | - | 4 | - | - | 4 | - | - | - | 8 | 8 |
| | 12. | Zuzana Černíková | 6. GFMP | - | - | 4 | 4 | - | - | - | - | 8 | 8 |
| | 31.–32. | Linda Mrázová | 7. GSOV | - | - | 3 | 2 | - | 3 | - | - | 8 | 8 |
| | | Adam Ucháč | 7. ZSSJ | - | - | 5 | - | - | - | 3 | - | 8 | 8 |
| | 61.–62. | Vít Jevčák | 8. ZSEB | - | 2 | 5 | - | 1 | - | - | - | 8 | 8 |
| | | Klaudie Rampasová | 8. AGKP | - | - | 5 | 3 | - | - | - | - | 8 | 8 |
| 179. | 63. | Ondřej Loukotka | 8. GKKO | 1 | - | 5 | - | - | - | - | - | 6 | 6 |
| 180.–185. | 13. | Tereza Pristačová | 6. GOPA | - | - | 5 | - | - | - | - | - | 5 | 5 |
| | 33. | Tadeáš Grabic | 7. ZSAL | - | - | - | - | 3 | - | 2 | - | 5 | 5 |
| | 64.–66. | Radim Křenek | 8. ZSYV | - | 2 | - | 3 | - | - | - | - | 5 | 5 |
| | | Filip Kováč | 8. ZSSK | - | 1 | 0 | 3 | 1 | - | - | - | 5 | 5 |
| | | Gwen Gonnot | 8. AGKP | - | - | 5 | - | - | - | - | - | 5 | 5 |
| | 65. | Dana Dvořáčková | 9. ZSBO | - | - | - | 3 | 2 | - | - | - | 5 | 5 |
| 186.–187. | 67. | Long Nguyen Hoang | 8. GJVK | - | - | - | 4 | - | - | - | - | 4 | 4 |
| | 66. | Emma Pěchoučková | 9. AGKP | - | 4 | - | - | - | - | - | - | 4 | 4 |
| 188.–243. | 1. | Jiří Dittrich | 4. | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | 14.–21. | Linda Macková | 6. ZSPU | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Eliška Chvátlová | 6. FZSB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Matěj Jech | 6. ZSCL | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | David Maynard | 6. ZSLC | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Karolina Štádlarová | 6. GJHP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Barbora Votluczková | 6. OPEN | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Kulhánek Jáchym | 6. GZSP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Klára Ucháčová | 6. | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | 34.–48. | Tereza Kovářová | 7. ZSNM | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Rudolf Kvasnovský | 7. ZSVS | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Jakub Genčur | 7. MZSB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Frantisek Ngo | 7. | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Eduard Dítě | 7. ZSZO | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Matyáš Boháček | 7. ZSKL | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Lucie Mottlová | 7. GBIB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Amálie A. Kulháňková | 7. OPEN | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Štěpán Nejtek | 7. GVOP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Michal Janík | 7. GJKP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Samuel Gawlik | 7. GCDP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Kateřina Blažková | 7. GJIR | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Elen Häuserová | 7. MGOP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Michal Smetana | 7. GJRC | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Jan Kavina | 7. GBLO | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | 68.–83. | Lucie Brabencová | 8. GMNP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Martin Šimša | 8. GOPA | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |

| <i>Celkově</i> | <i>V roč.</i> | <i>Jméno a příjmení</i> | <i>Roč. a škola</i> | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>P</i> | σ | Σ |
|----------------|---------------|-------------------------|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 188.–243. | 68.–83. | Karolína Onderková | 8. ZSVK | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Králík Pokusný | 8. GMKO | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Lenka Tučková | 8. ZSTV | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Štěpán Vodseďálek | 8. GFXS | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Marcel Doman | 8. GCAK | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Aneta Pecková | 8. ZSFY | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Adéla Mecová | 8. ZSTA | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Adéla Burešová | 8. ZSTT | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Jan Sebastian Pučera | 8. GVIB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Hugo Krotil | 8. GSOK | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Lia Samkharadze | 8. GJHP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Karel Maryško | 8. GDAR | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Tomáš Nováček | 8. GJVK | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Albert Pechoč | 8. GJVJ | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 67.–82. | | Kateřina Hubená | 9. GJHP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Šárka Štěpánková | 9. GJRC | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Michal Svoboda | 9. ZSSA | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Patrik Zavoral | 9. ZSLB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | David Leňko | 9. ZSPK | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Petra Klusáková | 9. ZSBT | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Matyáš Čupr | 9. ZSCE | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Alena Bierhanslová | 9. ZSMR | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Tomáš Grycz | 9. GMKA | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Eliška Václavíková | 9. GRPR | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Matěj Martiník | 9. GAJL | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Alice Helebrandtová | 9. GKAD | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Eliška Maloušková | 9. GVMS | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | Jakub Melichar | 9. GRIC | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| Štěpán Tichý | 9. GCHB | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | | |
| Jiří Močkoř | 9. GWOP | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | | |