

PIKOMAT MFF UK

Milé řešitelky, milí řešitelé,

právě startuje 32. ročník zábavné matematické soutěže Pikomat MFF UK!

Co je Pikomat?

Pikomatská je matematická soutěž pro žáky druhého stupně ZŠ a odpovídajících tříd víceletých gymnázií. V průběhu školního roku zveřejňujeme po sériích úlohy různých obtížností a z různých oblastí matematiky. Zadání těchto úloh jsou včleněna do příběhu, který provází celý ročník a který činí potěšení již ze čtení samotných zadání úloh. Autorem příběhu v tomto ročníku bude Miroslav Koblížek. Jak již bylo řečeno, náročnost úloh je rozmanitá, nemusíte se proto bát, že si v každé sérii nenajdete příklady vhodné přímo pro vás. Je možné řešit i jen některé z úloh dané série. Po odeslání vašich řešení (poštou, nebo elektronicky) je opravíme a odešleme s komentáři a bodovým ohodnocením zpět. Pošleme vám také vzorová řešení úloh, abyste se mohli podívat, jak se daly úlohy správně vyřešit. Výsledky jsou počítány jak celkově, tak rovněž po jednotlivých ročnících, aby například šestáci věděli, jak si na tom stojí ve srovnání se svými vrstevníky. Nejlepší z řešitelů z každého ročníku mají možnost se na jaře účastnit soustředění v jižních Čechách, kde mohou poznat jak nás, organizátory, tak své soupeře z řad řešitelů. Pikomat pořádá i další akce, např. vánoční besídku nebo tábor. O podrobnostech budeme informovat s dostatečným předstihem. Na konci celého ročníku budou pak nejlepší z vás oceněni diplomy i věcnými cenami. Tak co říkáte, stojí to za to?

Rozhodně ano! Zkuste si vyřešit první sérii. Zadání jsou uvedena na následujících stranách a na její řešení je spousta času. Termín odeslání je **17. října**.

Jak odesílat řešení?

Co vše je tedy třeba znát před odesláním první série? Nejprve je potřeba se zaregistrovat na <http://pikomats.mff.cuni.cz/sosna/solver/new>. V rámci přihlášky zadáte své kontaktní údaje a zvolíte si, jakým způsobem budete řešit (papírově, či elektronicky). Termíny jsou pro oba způsoby odevzdání totožné. Zatímco elektronicky můžete odevzdávat do půlnoci daného dne, při papírovém odesílání je třeba, aby obálka obsahovala razítko České pošty z požadovaného dne. Infor-

mace o elektronickém odevzdávání naleznete na <http://pikommat.mff.cuni.cz/faq>. **Termíny jsou zásadní.** V případě jejich nedodržení dochází k bodové penalizaci. Elektronický způsob odevzdání není po termínu technicky možný vůbec. **Úlohy zaslané emailem striktně nepřijímáme. Každá úloha musí být na samostatném papíru formátu A4,** na kterém musí být uvedeno vaše celé jméno a číslo úlohy. Pokud na řešení potřebujete více než jeden list, označte patřičným způsobem všechny tyto listy, abychom snadno poznali, ke které úloze patří. Po odeslání pak trvá zpravidla tři týdny, než úlohy opravíme a odešleme zpět. Za každou úlohu můžete získat 0 až 5 bodů, velmi **zásadní roli hraje popis postupu řešení.** Správná odpověď bez myšlenkových postupů a výpočtů, které k ní vedly, nemůže být oceněna plným počtem bodů. Každá série obsahuje 7 úloh, avšak do výsledkové listiny je započítáno jen nejlepších 6. Maximální počet bodů za jednu sérii je tedy 30.

Kam zasílat papírová řešení?

Kontaktní adresa, která slouží pro odesílání řešení papírovou formou, je Piko-
mat, KPMS MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8.

Máte-li nějaké dotazy ohledně organizace soutěže, podívejte se na stránku <http://pikommat.mff.cuni.cz/pravidla>. Pokud by vám i přesto nebylo něco jasné, ne-
bojte se napsat na pikommat@mff.cuni.cz.

Hodně zábavy a úspěchů při řešení přejí

Vaši organizátoři

Zadání úloh 1. série 32. ročníku

Termín odeslání: 17. října 2016

Seděl jsem ve své ordinaci, pomalu lžičkou míchal kávu a odhodlával se pozvat dovnitř prvního pacienta. Dnes ráno se mi vůbec nechtělo vstávat, natož jít pracovat. Venku bylo šero a už od včerejšího večera nepřetržitě pršelo. Když jsem šel přes dvůr do ordinace, kontroloval jsem srážkoměr, který jsem večer vyprázdnil, a voda v něm sahala po rysku s číslem 5.

Úloha č. 1: *Srážkoměr byl kužel o výšce 150 mm a průměru podstavy 300 mm, samozřejmě otočený vrcholem dolů a bez podstavy, aby do něj mohla pršet voda. V jaké výšce nad vrcholem má být na srážkoměru ryska s číslem 5, která značí 5 mm srážek, neboli to, že na 1 m² plochy spadne 5 litrů vody?*

„Tak pojdte dál, paní Farnthworthyová,“ volal jsem svoji první pacientku po otevřenými dveřmi. Sotva vstupovala, už jsem tušil, že se nebude jednat o nic vážného. Pro jistotu jsem ale stejně vzal stetoskop a poslechl si, jak tato starší dáma dýchá. Pak už jsem ji mohl začít uklidňovat: „Nebojte se, zápal plic nemáte a i podle ostatních příznaků se opravdu jedná jenom o obyčejné nachlazení, konekconců v tomhle počasí to není žádná vzácnost. Běžte domů a poproste služebnou, ať vám v pokoji pořádně zatopí a uvaří zázvorový čaj. Víc vám bohužel nepomůžu.“

Celý den se pomalu vlekl v podobném duchu. Všichni, kdo přišli, měli jen rutinní problémy a ještě k tomu chvílemi čekárna zela prázdnotou, zřejmě se lidem nechtělo do toho deště ani vycházet. Chvíle volna jsem si krátil luštěním různých hlavolamů v dnešním vydání The Times.

Úloha č. 2: *Nejzajímavější křížovka měla název 3D Sudoku. Její zadání jsou 4 čtverce 4 × 4 představující jednotlivá patra krychle 4 × 4 × 4. Úkolem luštitel je doplnit do prázdných buněk číslice od 1 do 4 tak, aby se neopakovaly v žádném řádku, sloupcu ani svislém sloupci. Navíc když z krychle vybereme libovolný čtverec 4 × 4 (v kterékoli rovině) a rozdělíme jej na čtyři čtverce 2 × 2, tak i tyto malé čtverce musejí obsahovat každou z číslic 1 – 4 právě jednou. Vyřešte zadané 3D Sudoku (obr. 1).*

Po obědě přišli dokonce pouze dva pacienti, a tak jsem přesně ve tři hodiny stál v kabátu a zamykal dveře své ordinace. V duchu jsem se radoval, že konečně jednou stihnu přijít včas na schůzi tenisového klubu. Budu tam muset splatit

| | | | |
|--|---|--|---|
| | | | |
| | | | 2 |
| | 1 | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|--|
| | | | |
| | 3 | | |
| | | | |
| 1 | | | |

| | | | |
|--|--|--|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | 4 |
| | | | |

| | | | |
|--|--|---|--|
| | | | |
| | | | |
| | | 2 | |
| | | | |

Obr. 1

svůj dluh za to, že jsem se v září nezúčastnil společné brigády.

Úloha č. 3: *Byl jsem domluven s dalšími třemi tenisty, že posečeme trávu kolem kurtů. Protože jsem ale byl narychlo odvolán k jednomu pacientovi, slíbil jsem jim, že když práci zvládnou beze mě, zaplatím každmu z nich 5 liber za každou hodinu, o kterou kvůli mně budou muset pracovat déle. Když jsem nedávno jednoho z nich potkal, postěžoval si mi, že tam tehdy všichni tři sekali od osmi hodin ráno do čtyř hodin odpoledne bez jakékoli přestávky. Kolik bych měl každému z nich zaplatit, aby to bylo spravedlivé?*

„Vy jste pan doktor Wilkins?“ vykřikl za mnou někdo, až jsem sebou leknutím trhl. „Pardon. Dobrý den,“ pokračoval zmateně a udýchaně.

„Ano, Harry Wilkins, dobrý den,“ odpověděl jsem a otočil jsem se, abych spatřil sotva 13letého chlapce. Stál proti mně celý promočený v šortkách a ušpiněné košili a zhluboka se vydýchal.

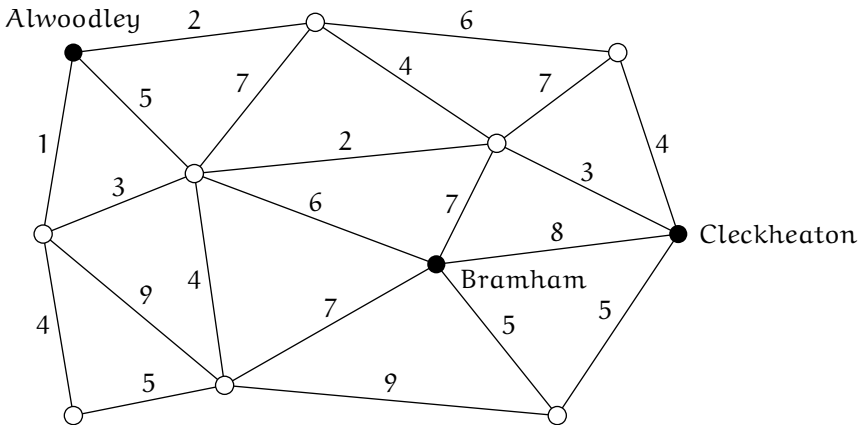
„Maminka mě posílá, abych vás rychle přivedl k nám, mému mladšímu bratříčkovi je strašně zle a vy prý snad budete ochotný nám pomoci,“ začal mi chlapec překotně vysvětlovat, proč přichází.

„Dobře, půjdu s tebou, vypadá to naléhavě,“ řekl jsem a znovu odemkl dveře ordinace, abych si odtud vzal příruční kufřík. Když jsem vešel dovnitř, napadlo mě, že bych ještě alespoň mohl využít toho, že jsem si sem před nedávnem nechal zavést telefon, a zavolat do tenisového klubu, abych se omluvil.

Úloha č. 4: *Telefonní číslo tenisového klubu je trojmístné, jeho ciferný součet je 11 a přitom je zároveň i dělitelné 11. Jaká všechna čísla splňují tyto vlastnosti?*

Když mi chlapec sdělil, že bydlí až ve vedlejší vesnici, rozhodl jsem se, že pojedeme drožkou. Naštěstí to nemám daleko na Chadwick Market, kde vždycky nějaká volná postává. Nastoupili jsme do jedné z nich. Trochu mě překvapilo, že kočí začal vytahovat z kapsy mapu, když jsem ho poprosil, aby nás zavezl do Bramhamu, ale než jsem se stihl vůbec zeptat, sám si začal stěžovat.

Úloha č. 5: „To víte, je to teď všechno zamotané. Radní se rozhodli některé silnice tady v okrese rekonstruovat, samozřejmě tak, aby se poté dalo mezi každými dvěma obcemi přejet jen po opravených cestách. Navíc si ale ti, kteří mají svá letní sídla v Alwoodley, Bramhamu a Cleckheatonu prosadili, že do těchto měst povede jen jedna opravená silnice, aby nebyli obtěžováni povozy a automobily, které by tudy jen projížděly. A samozřejmě to všechno chtějí udělat co nejlevněji. Nevím, které silnice se nakonec mají rekonstruovat, ale mám tu plánek s cenami všech (obr. 2). Dokázal byste z něj určit, které se budou opravovat a kolik to dohromady bude stát?“



Obr. 2

V malém domku na kraji Bramhamu už na nás čekala ustaraná matka dvou chlapců. Zavedla mě k jeho posteli a cestou mi začala líčit, kdy a jak problémy začaly: „Včera začal Jeremy od rána chřádnout. Myslela jsem si, že je asi jen unavený a nachlazený, ale během dne se to zhoršovalo a ani neměl chuť k jídlu. Večer začal celý hořet, tak jsem mu dala studené obklady, ale stejně se vzbudil několikrát v noci celý opocení. A dnes to bylo jen horší a horší.“

Pod peřinou ležel malý chlapec celý bledý a opocení. Jen s obtížemi cosi zamumlal jako odpověď na můj pozdrav, jak byl celý zsláblý. Když jsem ho lépe vyšetřil, sdělil jsem jeho matce: „Vůbec se mi jeho stav nelíbí. Za ten den v hořečkách už vypotil hodně vody a navíc ho to stojí spoustu sil, raději ho vezmu hned s sebou do nemocnice.“

„A co mu vůbec je?“ zeptala se ustaraně jeho matka.

„Nerad bych dělal ukvapené závěry, když nemám žádná další vyšetření. Podle příznaků to vypadá jako břišní tyfus, ale jsem z toho trochu zmatený, dlouho už jsem se s ním v našem okrese nesešel. Ale jak říkám, to jsou jen moje odhady, potvrdit to budu moci teprve tehdy, až zpracuji vzorky a podívám se na ně pod mikroskopem.“

Jeremyho jsem naložil do drožky, k tomu malý kufr s několika kousky oblečení, který mu matka v rychlosti sbalila, a vyrazili jsme zpět ku městu. V nemocnici jsem jej předal do rukou svého dobrého kamaráda a vydal jsem se domů, tentokrát už pěšky, protože konečně ustal déšť. Cestou jsem vytáhl z kapsy papír a tužku a pokoušel jsem se nakreslit si mapku, kterou mi ukazoval kočí.

Úloha č. 6: *Jak jsem ale brzy zjistil, mapku jsem si příliš dobře nezapamatoval. Jediné, co jsem měl nakreslené, byly body A, B, C a D spojené do čtyřúhelníku. K nim jsem potom přidal body P a Q a všiml jsem si, že v mém náčrtku byly čtyřúhelníky APCD i BCDQ rovnoběžníky. Jaký je poměr délek úseček AP a BQ?*

Papírek jsem schoval zpět do kapsy a místo něj vytáhl klíče, neboť už jsem se blížil ke svému domu. Když jsem zabočil za posledním rohem, všiml jsem si, že před mým domem stojí automobil s řidičem. Jen jsem vešel dovnitř, bytná mi sdělila, že na mě čeká nějaký zámožný pán.

„Dobrý večer, pane doktore Wilkinsi, Edward Whitaker,“ představil se mi muž, kterého jsem znal z novin jakožto radního a majitele jedné z továren za městem, „přijel jsem už asi před hodinou, abych vás požádal o pomoc. Mojí ženě je už dva dny zle a stále se to zhoršuje. Pojedte prosím se mnou, vaši práci vám samozřejmě náležitě zaplatím.“

Z původně nudného dne se rázem začínal stávat den velmi náročný, ale co jsem měl dělat, lékařský stav zkrátka vyžaduje trochu sebeobětování pro pomoc druhým. Nasedl jsem tedy s radním Whitakerem do jeho vozidla a zeptal jsem se jej, zda už ženě zkoušeli něco dávat.

„Ano,“ odpověděl mi radní, „měla horečky, a proto si začala brát aspirin, ale teď jí ještě rozbolelo břicho, nevím, jestli ne náhodou z těch prášků, brala jich každý den strašně moc, prý jí to poradila její známá.“

Úloha č. 7: *Paní Whitakerová měla 9 lahviček, ve kterých bylo dohromady 32 tablet aspirinu. Žádná z lahviček nebyla původně prázdná. Podle rady své kamarádky se měla snažit aspirin spotřebovat co nejrychleji, a to tak, že každý den si mohla vzít buď všechny tablety z jedné lahvičky, nebo jednu tabletu z každé neprázdné lahvičky. Jaký nejmenší možný počet dní paní Whitakerová potřebuje, aby spotřebovala všechny tablety, ať už byly na začátku rozmístěny v lahvičkách jakkoliv?*

„To se mi nezdá jako moc dobrý způsob užívání léků, příště by se vaše paní měla radit spíše s lékařem či lékárníkem, ale na druhou stranu si nemyslím, že by jí to mohlo způsobit tak velké potíže.“

„To jste mě aspoň trochu uklidnil, ale ty horečky ženu trápí už přes dva dny a ani takové dávky aspirinu na to nezabraly.“

Až teď, když pan Whitaker znovu promluvil o horečkách, mi hlavou prolétla myšlenka, aby to náhodou nebyl také břišní tyfus, ale rychle jsem ji zase zapudil. Lékař by si neměl stanovovat diagnózu ještě před tím, než vůbec spatří svého pacienta.